Athletica Galactica

Kárpát-medencei Középiskolai Csillagászati és Asztrofizikai Verseny

2021/2022 I. forduló
Megoldások

I. Totó (10 p)

II/1. $\boxed{\text{x}}$

II/2. $\boxed{1}$

II/3. $\boxed{2}$

II/4. $\boxed{2}$

II/5. $\boxed{1}$

II. Indoklásos tesztkérdések (20 p)

II/1. $\boxed{\text{B}}$

Indoklás: Ha a tömeget naptömegben, a távolságot csillagászati egységben, az időt pedig évben mérjük, akkor Kepler III. törvénye:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1,$$

ahol a a fél nagytengely csillagászati egységben, T pedig a keringési idő évben. Ebből:

$$T = \sqrt{a^3}$$

Numerikus értékkel: $\boxed{T = 5{,}2\,\text{év}}$

II/2. $\boxed{\text{C}}$

Indoklás: A φ földrajzi szélességű helyről azok a csillagok emelkednek a horizont fölé, amelyekre $\delta \geq \varphi - 90°$. Soha nem látszanak azok, amelyekre $\delta < \varphi - 90°$. Ebből: $\boxed{\delta < -42{,}5°}$

I/3. $\boxed{\text{A}}$

Indoklás: Körpályán a bolygó pályaimpulzus-nyomatéka $I = mrv$, ahol m a tömege, r a pálya sugara, v pedig a bolygó pálya menti sebessége.

Numerikus értékekkel: $\boxed{I \approx 2 \cdot 10^{43}\,\text{kg}\,\text{m}^2\,\text{s}^{-1}}$

II/4. $\boxed{\text{C}}$

Indoklás: Az M tömegű és R sugarú bolygón a szökési sebesség:

$$v_{\text{sz}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{4GM_{\text{F}}}{\frac{R_{\text{F}}}{3}}} = \sqrt{\frac{12GM_{\text{F}}}{R_{\text{F}}}} = \sqrt{6}\sqrt{\frac{2GM_{\text{F}}}{R_{\text{F}}}}$$

Numerikus értékekkel: $\boxed{v_{\text{sz}} = 27{,}4\,\text{km}\,\text{s}^{-1}}$

II/5. $\boxed{\text{A}}$

Indoklás: A D_{t} átmérőjű távcső szögfelbontása λ hullámhosszon: $\varphi = 1{,}22\,\dfrac{\lambda}{D_{\text{t}}}$, ahol λ-t és D_{t}-t méterben megadva φ-t radiánban kapjuk. Ebből:

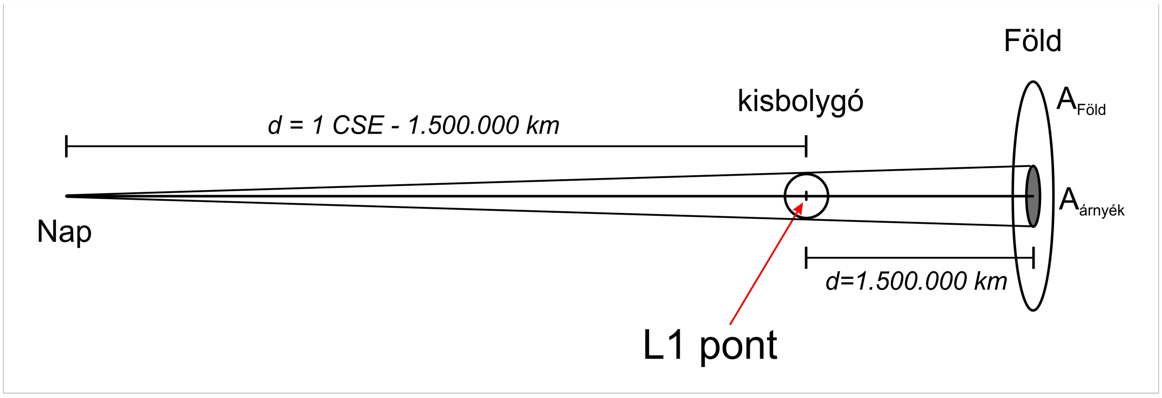
$$D_{\text{t}} = 1{,}22\,\frac{\lambda}{\varphi} = 1{,}22\,\frac{\lambda}{\frac{D_{\text{k}}}{d_{\text{M}}}} = 1{,}22\,\lambda\,\frac{d_{\text{M}}}{D_{\text{k}}},$$

ahol D_{k} a kráter átmérője, d_{M} pedig a Mars távolsága.

Numerikus értékekkel: $\boxed{D_{\text{t}} = 0{,}16\,\text{m} = 16\,\text{cm}}$

III. Kifejtős kérdés: Árnyékolás kisbolygóval **(20 p)**

a) A javasolt Föld-mentő eljárás geometriája (oldalnézetben, a földpálya síkjában):



(5 p)

b) A Napból a Földet elérő összes sugárzás a Föld átmérőjéből kiszámolható $A_{\text{Föld}}$ keresztmetszeten átáramló energiamennyiség. Ezt kell 10%-kal csökkenteni. A kisbolygó által leárnyékolt $A_{\text{árnyék}}$ területre tehát igaz, hogy:

$$A_{\text{árnyék}} = 0{,}1 \cdot A_{\text{Föld}} \qquad (2\,\text{p})$$

Első lépésben ebből kiszámítjuk, hogy a Földnél (a Naptól 1 CSE távolságban) mekkora a kisbolygó árnyékának sugara:

$$A_{\text{árnyék}} = r_{\text{árnyék}}^2 \pi = 0{,}1\, A_{\text{Föld}} = 0{,}1\, r_{\text{Föld}}^2 \pi$$

$$r_{\text{árnyék}} = r_{\text{Föld}} \sqrt{0{,}1} = 6371\,\text{km} \cdot 0{,}3162 = \boxed{2014{,}7\,\text{km}} \qquad (2\,\text{p})$$

Második lépésben pedig két hasonló derékszögű (a Nap–L1 befogójú- és a Nap–Föld befogójú) háromszög segítségével meg tudjuk határozni a kisbolygó méretét:

$$\frac{r_{\text{kisbolygó}}}{1\,\text{CSE} - 1\,500\,000\,\text{km}} = \frac{r_{\text{árnyék}}}{1\,\text{CSE}} \qquad (2\,\text{p})$$

$$r_{\text{kisbolygó}} = \frac{r_{\text{árnyék}}}{1\,\text{CSE}} \left(1\,\text{CSE} - 1{,}5 \cdot 10^6\,\text{km}\right) =$$

$$\frac{2014{,}7\,\text{km}}{1{,}496 \cdot 10^8\,\text{km}} \left(1{,}496 \cdot 10^8\,\text{km} - 1{,}5 \cdot 10^6\,\text{km}\right) = \boxed{1994{,}5\,\text{km}} \qquad (1\,\text{p})$$

Ez nagyobb, mint a Holdunk, valahol a Jupiter Io és Callisto holdjának mérete között van. Ilyen nagy méretű kisbolygó, sőt törpe bolygó sem ismert.

c) A probléma megoldásának elemzése:

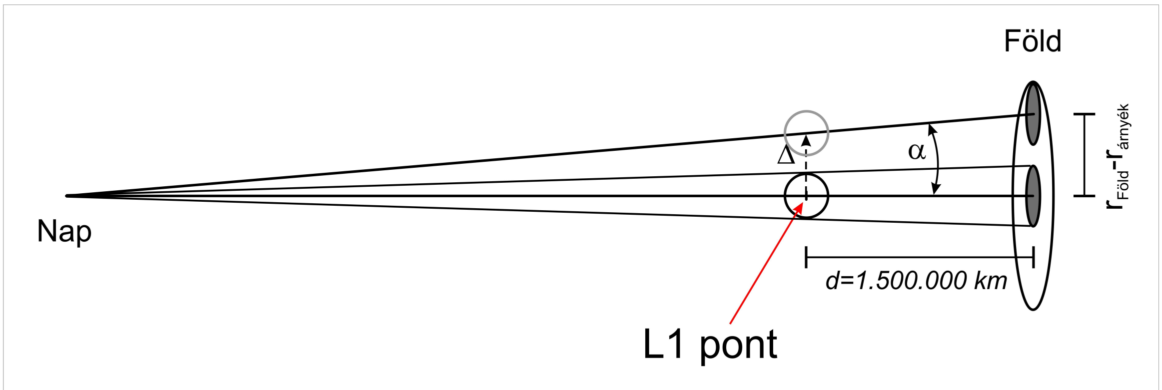
- Legnagyobb gond tehát az, hogy ilyen nagy méretű kisbolygó nem is áll rendelkezésre, amelyet ide tudnánk vontatni a Nap–Föld-rendszer L1 pontjába. (1 p)

- Ez a probléma kikerülhető azzal, hogy nem egyetlen kisbolygót vontatunk ide, hanem több kis méretű kisbolygót, amelyek összes árnyékterülete kiadja a kellő értéket. (2 p)

- További probléma, hogy – eltekintve mindenféle másodlagos hatásoktól – a napfogyatkozásokhoz hasonló módon egy jól körülhatárolt, ~2000 km-es területről kizárt besugárzás hatására több fokkal lehűl a légkör és a talaj, valamint a vízfelületek is. A Föld tengelyforgásával ez egy 2000 km széles sávot fog jelenteni, az egyenlítő körüli 23,5 fokos dőlésszögben. Csak valamilyen komolyabb hidrodinamikai modellezés tudná megmutatni, hogy ez mennyire drasztikusan változtatná meg a Föld légkörzési rendszerét, légköri és tengeri áramlatait. Minden bizonnyal drámaian megváltoztatná a lakott kontinensek jelenlegi időjárását! (5 p)

- **A következő megjegyzést nem kell tudniuk, de ha valaki tudja, *+5 pont* lehet a jutalma.** Az L1 pont instabil, ami annyit jelent, hogy az oda helyezett (akár pontszerű) tömeg a legkisebb zavaró hatásra elmozdul a pozíciójából, és (a numerikus modellezések által is jól kimutatható módon) „nem zárt” (önmagába nem visszatérő) pályára térve véges időn belül el is hagyja azt. Ha véges időn belül jelentős mértékben eltávolodik az L1 ponttól, akkor megszűnik a besugárzást mérséklő hatása is! Ilyenkor újabb árnyékoló égitesteket kell odahúzni, illetve a befogott égiteste(ke)t állandó jelleggel, mesterséges beavatkozással kell ott tartani az L1 pontban. Ez igen nagy energiaráfordítást igénylő feladat...

  Az ábra alapján adjunk becslést arra, hogy mekkora szögű elmozdulás mellett marad meg a kb. 10% mértékű besugárzás-leárnyékolás? Ennek maximális mértéke az ábra szerinti α szög.



$$\tan\alpha = \frac{r_{\text{Föld}} - R_{\text{árnyék}}}{1\,\text{CSE}} = \frac{6371\,\text{km} - 2014{,}7\,\text{km}}{1{,}496 \cdot 10^{8}\,\text{km}} = 2{,}912 \cdot 10^{-5}$$

$$\alpha = 0{,}001\,67^\circ = 0{,}1' = 6''$$

Ez a kisbolygó távolságánál

$$\Delta = \tan\alpha\left(1\,\text{CSE} - 1{,}5 \cdot 10^{6}\,\text{km}\right) =$$

$$2{,}912 \cdot 10^{-5}\left(1{,}496 \cdot 10^{8}\,\text{km} - 1{,}5 \cdot 10^{6}\,\text{km}\right) = 4312{,}7\,\text{km},$$

azaz alig valamivel több elmozdulás, mint a kisbolygó átmérője, már csökkenti az árnyékoló (hűtő) hatást. Márpedig ennél lényegesen nagyobb elmozdulások várhatóak.

Ilyen befolyásoló erőhatások a Föld körüli térség interplanetáris porának közegellenállása, a Nap, a Föld és a Hold árapálykeltő ereje, a Napból érkező fény nyomásának a kisbolygó véges kiterjedéséből eredő hatása, stb. Ezek mind kitéríteni igyekeznek a kisbolygót az L1 Lagrange-pontból.

- Még egy ötlet felmerülhet:

  A sok felmerülő probléma helyett még egy lehetőség van, ami hasonló elven hűtené a Földünket: az L1 pont környékére sűrű port kell injektálni (szétrobbantani egy kisebb, porózus kisbolygót), és időnként ezt megismételni. Ez a Föld teljes Nap felé forduló oldalát árnyékolná ~10% mértékben (a porfelhő átlagsűrűségének hangolásával lehet beállítani), így kisebb léptékű új (zavaró) áramlási rendszerek sem lépnének talán fel.

IV/1. A nappal hossza nap-éj egyenlőségkor (10 p)

a) A Nap Földről látszó szögátmérőjének fele (a sugara):

$$\theta = \frac{R_\odot}{d_{\mathrm{NF}}} = \frac{6{,}964 \cdot 10^8\,\mathrm{m}}{1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}} = 4{,}66 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad} = 0{,}267^\circ \qquad (2\,\mathrm{p})$$

A napkorong középpontjának szögsebessége:

$$\omega = \frac{180^\circ}{12 \cdot 60\,\mathrm{min}} = 0{,}25^\circ\,\mathrm{min}^{-1} \qquad (2\,\mathrm{p})$$

A többletidő:

$$\Delta t_1 = 2 \cdot \frac{\theta}{\omega} = 2 \cdot \frac{0{,}267^\circ}{0{,}25^\circ\,\mathrm{min}^{-1}} = \boxed{2{,}14\,\mathrm{min}} \qquad (2\,\mathrm{p})$$

b) A légköri refrakció miatti többletidő:

$$\Delta t_2 = 2 \cdot \frac{\theta'}{\omega} = 2 \cdot \frac{0{,}6^\circ}{0{,}25^\circ\,\mathrm{min}^{-1}} = \boxed{4{,}8\,\mathrm{min}} \qquad (2\,\mathrm{p})$$

A teljes többletidő:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2{,}14\,\mathrm{min} + 4{,}8\,\mathrm{min} = 6{,}94\,\mathrm{min} \approx \boxed{7\,\mathrm{min}} \qquad (2\,\mathrm{p})$$

IV/2. Lencsés távcsövek nagyítása és hossza (10 p)

A távcső nagyítása az objektív f_0 és az okulárlencse f_o fókusztávolságával kifejezve:

$$N = -\frac{f_0}{f_\mathrm{o}} \qquad (2\,\mathrm{p})$$

Ha az okulár gyűjtőlencse, Kepler-, ha szórólencse, Galilei-távcsőről beszélünk. Ezek nagyítása:

$$N_\mathrm{K} = -\frac{f_0}{f_\mathrm{gy}},\; N_\mathrm{G} = \frac{-f_0}{-f_\mathrm{sz}} = \frac{f_0}{f_\mathrm{sz}}, \qquad (2\,\mathrm{p})$$

ahol a negatív előjel a fordított állású, a pozitív pedig az egyenes állású képnek felel meg.

Éles képhez az objektív- és az okulárlencsék megfelelő fókuszainak egybe kell esniük, ezért a távcső hossza:

$$L = f_0 + f_\mathrm{o} \qquad (1\,\mathrm{p})$$

A Kepler- és a Galilei-távcsövekre így:

$$L_\mathrm{K} = f_0 + f_\mathrm{gy},\; L_\mathrm{G} = f_0 - f_\mathrm{sz} \qquad (2\,\mathrm{p})$$

A hosszak aránya (nyilván $L_\mathrm{K} > L_\mathrm{G}$):

$$\frac{L_\mathrm{K}}{L_\mathrm{G}} = \frac{f_0 + f_\mathrm{gy}}{f_0 - f_\mathrm{sz}} = \frac{\frac{f_0}{f_\mathrm{gy}} + 1}{\frac{f_0}{f_\mathrm{sz}} - 1} = \frac{-N_\mathrm{K} + 1}{N_\mathrm{G} - 1} = \frac{N+1}{N-1},\ \text{azaz}\ \boxed{\frac{L_\mathrm{K}}{L_\mathrm{G}} = \frac{N+1}{N-1}} \qquad (3\,\mathrm{p})$$

IV/3. „Kettősbolygók" **(10 p)**

a) A számértéket az r kifejezésébe helyettesítve:

$$r = 5{,}20 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \cdot \frac{1{,}90 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}}{1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} + 1{,}90 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}} =$$

$$7{,}44 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m} = \boxed{1{,}07\,\mathrm{R}_\odot} \qquad (1\,\mathrm{p})$$

(Az 1 ponthoz az is kell, hogy r-t $\mathrm{R}_\odot$ egységben is megadja vagy egyértelműen leírja, hogy r nagyobb a Nap sugaránál!)

b) r kifejezéséből:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a}{r} - 1 \qquad (2\,\mathrm{p})$$

A Pluto–Charon rendszerre:

$$\frac{m_{\mathrm{Pl}}}{m_{\mathrm{Ch}}} = \frac{19\,570\,\mathrm{km}}{1{,}83 \cdot 1187\,\mathrm{km}} - 1 = \boxed{8{,}01} \qquad (2\,\mathrm{p})$$

c) a értéke a feltétel teljesülésekor:

$$a' = R_{\mathrm{F}} \left(\frac{M_{\mathrm{F}}}{M_{\mathrm{H}}} + 1 \right) = 6371\,\mathrm{km} \cdot (83{,}1 + 1) = 5{,}358 \cdot 10^{5}\,\mathrm{km} \qquad (2\,\mathrm{p})$$

A Hold által eddig megteendő távolság:

$$d = a' - a = 5{,}358 \cdot 10^{5}\,\mathrm{km} - 3{,}844 \cdot 10^{5}\,\mathrm{km} = 1{,}514 \cdot 10^{5}\,\mathrm{km} \qquad (1\,\mathrm{p})$$

A távolodás üteme $4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{km\,év^{-1}}$, így a d távolság megtételéhez szükséges idő:

$$t = \frac{1{,}514 \cdot 10^{5}\,\mathrm{km}}{4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{km\,év^{-1}}} = \boxed{3{,}8 \cdot 10^{9}\,\mathrm{év}} \qquad (2\,\mathrm{p})$$

IV/4. Bolygó gyűrűrendszerének Roche-határai (20 p)

a) A Roche-határnál $F_{\text{grav}} = F_{\text{árap}}$, azaz:

$$\frac{Gmu}{r^2} = \frac{2GMur}{d_{\text{Rh}}^3} \to d_{\text{Rh}} = r\left(2\,\frac{M}{m}\right)^{1/3} \qquad (2\,\text{p})$$

A bolygó és a hold tömege a sűrűséggel kifejezve:

$$M = \frac{4}{3}\,\pi \varrho_{\text{b}} R^3 \text{ és } m = \frac{4}{3}\,\pi \varrho_{\text{h}} r^3 \qquad (2\,\text{p})$$

Ezeket az előző kifejezésbe helyettesítve:

$$d_{\text{Rh}} = r\left(2\,\frac{\varrho_{\text{b}} R^3}{\varrho_{\text{h}} r^3}\right)^{1/3} \qquad (2\,\text{p})$$

$r^{1/3}$-nal egyszerűsítve:

$$\boxed{d_{\text{Rh}} = R\left(2\,\frac{\varrho_{\text{b}}}{\varrho_{\text{h}}}\right)^{1/3}} \qquad (2\,\text{p})$$

b) A Szaturnusz sűrűsége:

$$\varrho_{\text{Sz}} = \frac{M_{\text{Sz}}}{\frac{4}{3}\,\pi R_{\text{Sz}}^3} = \frac{5{,}68 \cdot 10^{26}\,\text{kg}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (6{,}027 \cdot 10^7\,\text{m})^3} = 619\,\text{kg}\,\text{m}^{-3} \qquad (2\,\text{p})$$

Ezzel a Roche-határ:

$$d_{\text{Rh,min}} = R_{\text{Sz}}\left(2\,\frac{\varrho_{\text{Sz}}}{\varrho_{\text{jég}}}\right)^{1/3} = 60\,270\,\text{km}\left(2 \cdot \frac{619\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}}{930\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}}\right)^{1/3} = \boxed{66\,300\,\text{km}} \qquad (2\,\text{p})$$

c) Fel kell ismerni, hogy a képletben a 2 helyére 14,53-at kell írni, így:

$$d_{\text{Rh,max}} = 60\,270\,\text{km}\left(14{,}53 \cdot \frac{619\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}}{930\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}}\right)^{1/3} = \boxed{128\,400\,\text{km}} \qquad (2\,\text{p})$$

d) Mivel $d_{\text{Rh,min}} = 66\,300\,\text{km} \approx 1{,}10\,R_{\text{Sz}}$ és $d_{\text{Rh,max}} = 128\,400\,\text{km} \approx 2{,}13\,R_{\text{Sz}}$, így a kiszámolt Roche-határok nagyjából megegyeznek a gyűrűrendszer határaival. (2 p)

e) A Roche-határt $2\,R_{\text{Sz}}$ sugárnál elérő tökéletesen folyékony hold sűrűsége:

$$\varrho_{\text{h}} = \frac{\varrho_{\text{b}}}{(2/2{,}44)^3} = \frac{619\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}}{(2/2{,}44)^3} = 1124\,\text{kg}\,\text{m}^{-3} \qquad (2\,\text{p})$$

A Veritas sugara (M_{gy} a gyűrűrendszer tömege):

$$r = \left(\frac{M_{\mathrm{gy}}}{\frac{4}{3}\,\pi \varrho_{\mathrm{h}}} \right)^{1/3} = \left(\frac{3 \cdot 10^{19}\,\mathrm{kg}}{\frac{4}{3}\,\pi \cdot 1124\,\mathrm{kg\,m^{-3}}} \right)^{1/3} = 1{,}85 \cdot 10^{5}\,\mathrm{m} = \boxed{185\,\mathrm{km}} \qquad (2\,\mathrm{p})$$