Athletica Galactica

Kárpát-medencei Középiskolai Csillagászati és Asztrofizikai Verseny

2023/2024

Döntő – DA

2024. március 8–10.

Jászberény

Versenyző
kódja / évfolyama

. . . . / . . . .

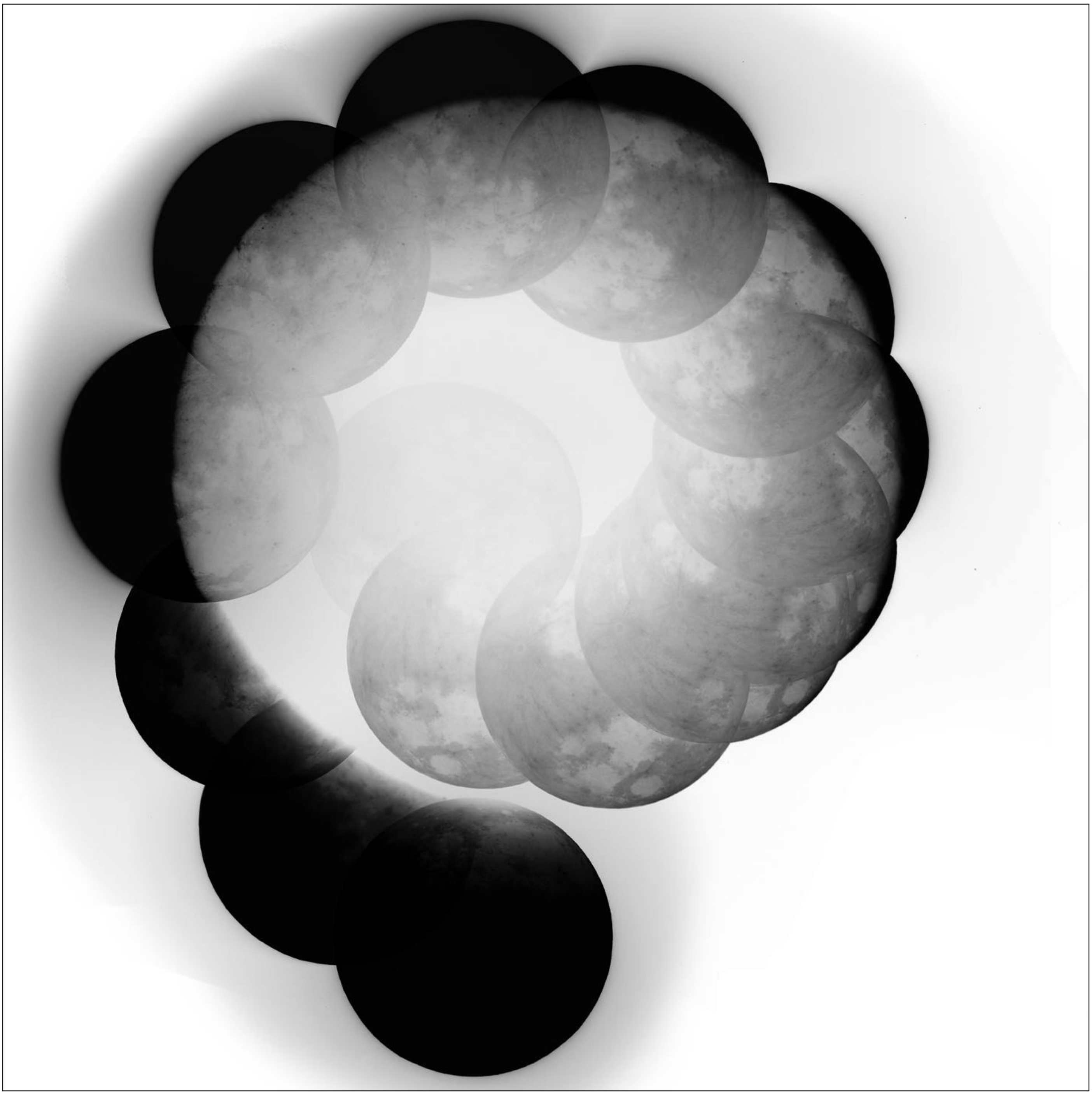
Elért pontszám: . . . . / 60

1. A Föld árnyékos oldalán

15 p

Holdfogyatkozáskor a Hold a Föld árnyékába merül, amelynek két része van, a teljes árnyék (umbra) és a félárnyék (penumbra). Az eseményről az asztrofotósok szép felvételsorozatokat készítenek, és ezeket gyakran olyan montázsokba rendezik, amelyek kiválóan érzékeltetik az umbra színét, annak méretét a Hold távolságában, és azt, hogy bolygónk (és természetesen égi kísérőnk is) gömb alakú.

Ilyen montázs – annak negatív, fekete-fehér változata – látható az alábbi képen, amelyet Tom Harradine ausztrál asztrofotós készített a 2018. július 27-i teljes holdfogyatkozás során rögzített felvételeiből, nagy gonddal elforgatva, eltolva és illesztve azokat, hogy összeálljon a Föld teljes árnyékának metszeti képe.

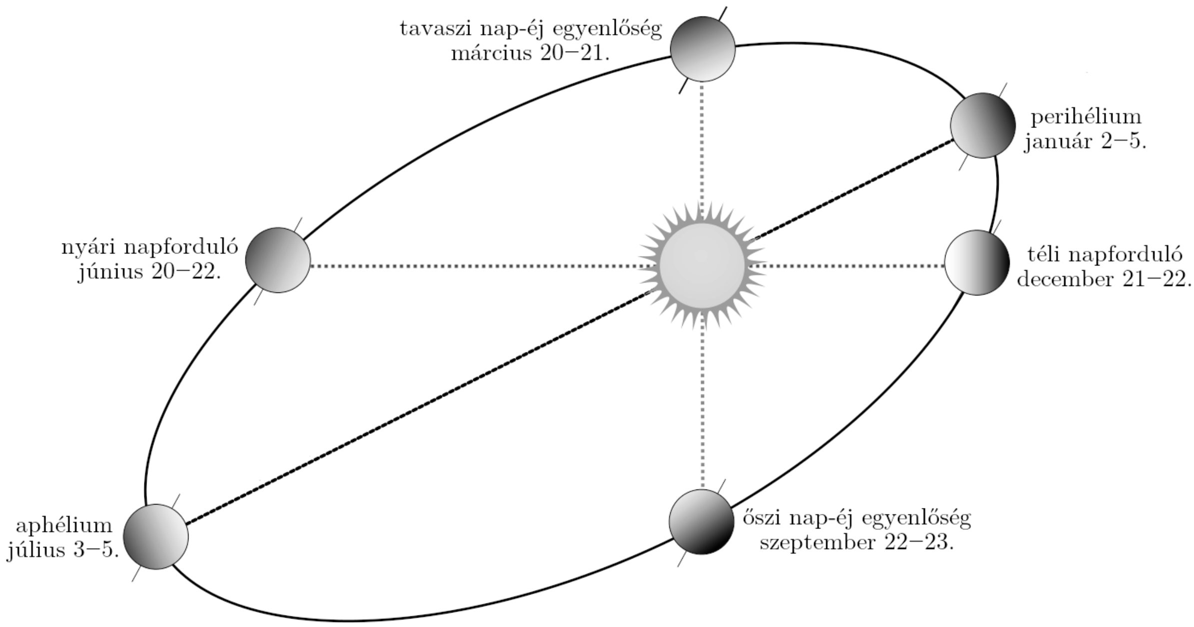


A kép eredetijének forrása Tom Harradine Facebook-oldala:
`https://www.facebook.com/tom.harradine.12`

A képen vonalzóval végzett **egyszerű** mérések és az azok eredményeit felhasználó, illetve **egyéb megfontolásokon** nyugvó számítások alapján adj választ a következő, távolságokra vonatkozó kérdésekre!

a) Milyen messze volt a Föld a Naptól a holdfogyatkozás idején? (4 p)

A Nap–Föld-távolságra adott becslésed meghatározásában segítségedre lehet az alábbi, minden egyéb kommentár nélküli sematikus ábra.



b) Mekkora volt a távolság a Föld középpontja és a teljes árnyék kúpjának csúcsa között? (5 p)

Készíts ábrát is a jelenség geometriájáról, és a választ az alapján add meg!

c) Milyen messze volt a Hold a Földtől a fogyatkozás idején? (6 p)

Az előző részhez készített ábrádat egészítsd ki úgy, hogy itt is használható legyen!

A szükséges adatokat a Konstanstáblázatból vedd! Az eredményeket pedig km egységben add meg, mindegyik esetben normálalakban, három tizedesjegyre! A Napot, a Földet és a Holdat tekintsük gömb alakúnak.

2. Gömbhalmazok párolgási idejének függése a tömegüktől/luminozitásuktól **45 p**

Bár élettartamuk nagyságrendekkel hosszabb, mint a nyílthalmazoké, végül a gömbhalmazok is felbomlanak: a tagok elhagyják a halmaz gravitációs kötelékét. A folyamat neve „párolgás” (evaporation), karakterisztikus ideje pedig az az időtartam, ami alatt a gömbhalmaz elveszti tagjainak nagy részét.

Mivel egy tipikus gömbhalmazban nagyon sok csillag található, a párolgási idő becsléséhez numerikus szimulációkat kell végezni. A számítások egyszerűsítése érdekében ezekben gyakran csak a halmaz belső dinamikáját veszik figyelembe. Sok futtatás eredményeként aztán végül becslés adható a párolgási időre. (Külső hatások – például gravitációs árapályerők – figyelembevétele csökkenti a karakterisztikus párolgási időt, akár 1-2 nagyságrenddel is.)

Az alábbi táblázat 14 gömbhalmazra mutatja a becsült t_p párolgási időket, a halmazok csillagközi vörösödésre korrigált M_V abszolút vizuális fényességét, valamint a galaktikus centrumtól mért d_gc és a Naptól mért $d_\odot$ távolságukat. (Látható, hogy a legrövidebb becsült párolgási idők is közel egy nagyságrenddel hosszabbak az Univerzum koránál.)

Halmaz neve	t_p [10^{11} év]	M_V [mag]	d_gc [kpc]	$d_\odot$ [kpc]
ω Cen	12,30	−10,26	6,4	5,2
M2	2,51	−9,03	10,4	11,5
M3	6,16	−8,88	12,0	10,2
M4	0,85	−7,19	5,9	2,2
M5	2,57	−8,81	6,2	7,5
M10	0,79	−7,48	4,6	4,4
M12	0,74	−7,31	4,5	4,8
M13	2,00	−8,55	8,4	7,1
M14	2,45	−9,10	4,0	9,3
M15	2,09	−9,19	10,4	10,4
M19	2,39	−9,13	1,7	8,8
M22	1,70	−8,50	4,9	3,2
M28	1,48	−8,16	2,7	5,5
M30	0,76	−7,45	7,1	8,1

A halmazok t_p párolgási ideje azok $\mathcal{M}$ tömegével áll kapcsolatban:

$$t_\mathrm{p} = k_1 \mathcal{M}^\gamma \varepsilon$$

Itt k_1 egy ismeretlen állandó, $\mathcal{M}$ a halmaz tömege, ε a halmazra jellemző hibatényező, γ pedig egy meghatározandó paraméter. Az ε hibatényező a halmaz tömegen kívüli egyéb fizikai paramétereinek hatását jeleníti meg. Mivel a halmaz tömegével nem korrelál, ezért konstansnak tekinthetjük.

A gömbhalmazok tömegének meghatározása gyakran csak nagy hibával lehetséges, ezért egy másik összefüggést is alkalmazhatunk, amely azon a feltevésen alapul, hogy a gömbhalmazok luminozitása arányos a tömegükkel, azaz:

$$L \propto \mathcal{M}$$

Így a helyettesítő összefüggés:

$$t_\mathrm{p} = k_2 L^\gamma \varepsilon$$

Itt k_2 egy másik, a k_1-től különböző ismeretlen állandó.

A feladatod a táblázat adatainak felhasználásával a t_p párolgási idő és az L luminozitás közötti összefüggésben szereplő γ kitevő meghatározása, áttételesen pedig az $L \propto \mathcal{M}$ feltevés helyességének igazolása.

a) Először alakítsd át az összefüggést úgy, hogy a transzformált adatokra egyenest tudj illeszteni, és a γ paramétert az illesztett egyenes paramétereiből határozhasd majd meg! (8 p)

Segítség: A táblázatban nem szerepelnek luminozitásértékek. Gondolj azonban arra, hogy milyen kapcsolat van a luminozitás és az abszolút bolometrikus fényesség között, utóbbit pedig közelítsd az abszolút vizuális fényességgel! Így felállíthatod a t_p és az M_V közötti kapcsolatot, amely alapján már elvégezheted az egyenesillesztést.

b) A t_p és az M_V közötti összefüggés ismeretében ténylegesen is végezd el az egyenesillesztést a Konstanstáblázatban megadott módon!

Azért, hogy a számításaidat könnyebben tudjuk ellenőrizni, ne csak az illesztett egyenes a meredekségét és b tengelymetszetét add meg három tizedesjegyre, hanem az S_x, S_y, S_{xx}, S_{xy}, Δ és χ^2 segédparamétereket is, szintén három tizedesjegyre! Előtte azonban a transzformált adatok számértékeit is add meg két tizedesjegyre! (15 p)

c) Az illeszkedés jóságát az R^2 paraméterrel mérhetjük, amelyet a következő módon határozhatunk meg. Képezzük az

$$SS_\mathrm{res} = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2 \text{ és } SS_\mathrm{tot} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

összegeket. Az x_i-k a független, az y_i-k a függő változó értékei, $\bar{y}$ utóbbiak átlaga, az $f(x_i)$-k pedig az illesztett egyenes által az x_i helyeken felvett értékek.

Ezekkel az R^2 paraméter:

$$R^2 = 1 - \frac{SS_\mathrm{res}}{SS_\mathrm{tot}}$$

Az R^2 (leegyszerűsített) jelentése: a függő változó átlag körüli szórásából mekkora részt magyaráz meg a függő és független változó között feltételezett lineáris kapcsolat. Értéke 0 és 1 közé eshet, minél nagyobb, annál „biztosabb” a lineáris kapcsolat.

Határozd meg az R^2 értékét három tizedesjegyre! (3 p)

d) Az illesztett egyenes paramétereinek ismeretében határozd meg a γ paramétert, szintén három tizedesjegyre! (2 p)

e) Ábrázold milliméterpapíron az illesztéshez felhasznált adatpontokat, illetve az azokból származtatott értékeket, valamint az illesztett egyenest is! A tengelyeket úgy skálázd, hogy az ábra kitöltse a teljes rácsot! Ne felejtsd el a tengelyfeliratokat, és adj az ábrának címet is! Az ábra felső részére, a cím alá írd rá az illesztett egyenes egyenletét is a konkrét paramétereivel! (10 p)

f) Az illesztés alapján határozd meg az NGC 1261 katalógusjelű gömbhalmaz párolgási idejét, és azt megcímkézve, a koordinátaértékekkel együtt jelöld az ábrán is! (7 p)

A halmaz látszó vizuális fényessége $m_{V,\mathrm{NGC1261}} = 8{,}31^\mathrm{m}$, a galaktikus centrumtól és a Naptól mért távolsága pedig $d_{\mathrm{gc,NGC1261}} = 18{,}3\,\mathrm{kpc}$ és $d_{\odot,\mathrm{NGC1261}} = 16{,}4\,\mathrm{kpc}$.

1. A Föld árnyékos oldalán $\boxed{15\,\mathrm{p}}$

a) A holdfogyatkozás július 27-én következett be, kb. három héttel azután, hogy a Föld július 3–5. környékén pályájának Naptól legtávolabbi pontjában (aphélium) volt – ebben segít a mellékelt ábra –, így a keresett d_{NF} távolságra még jó becslés a Föld aphéliumtávolsága. (2 p)

Az aphéliumtávolság a pálya a fél nagytengelyével és e excentricitásával:

$$d_{\mathrm{NF}} = r_{\mathrm{a}} = a(1+e) \qquad (1\,\mathrm{p})$$

A Konstanstáblázatból a és e értéke:

$$a = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}, \;\; e \approx 0{,}017$$

Az adatokkal a kért formátumban:

$$\boxed{d_{\mathrm{NF}} \approx 1{,}521 \cdot 10^{8}\,\mathrm{km}} \qquad (1\,\mathrm{p})$$

Ellipszispálya esetén a vonzócentrumtól mért r távolság:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

Itt a a pálya fél nagytengelye, e az excentricitása, θ pedig a valódi anomália, a keringés irányában mért PNO szög (P: pericentrum, N: Nap, O: objektum).

A Föld esetében élhetünk azzal a közelítéssel, hogy θ egy nap alatt 1°-kal nő. Mivel a holdfogyatkozás az aphélium ($\theta = 180°$) után kb. három héttel következett be, így legyen $\theta = 200°$.

Ezzel az r-re vonatkozó formulából:

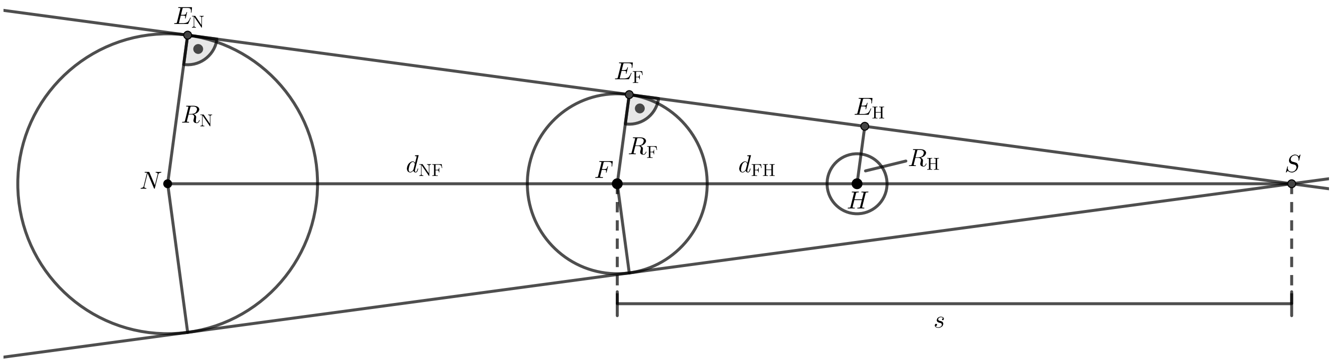
$$d_{\mathrm{NF}} = r \approx 1{,}519 \cdot 10^{8}\,\mathrm{km}$$

Láthatjuk, hogy a két érték közötti különbség mindössze legfeljebb 200 ezer km, ezért nyugodtan használhatjuk az első közelítésben kapott értéket, de természetesen ez utóbbi gondolatmenetért, számolásért és eredményért is teljes pontszám jár.

Nem jár pont a $d_{\mathrm{NF}} = 1\,\mathrm{CSE}$ közelítésért.

A fogyatkozás közepekor a Nap és a Föld távolsága 10^8 km egységben kifejezve három tizedesjegy pontosságra egyébként éppen 1,519 volt.

b) Az alábbihoz hasonló vázlatos, már a következő rész megoldásához szükséges elemet (Hold) is tartalmazó ábra elkészítése az esemény geometriájáról: (2 p)



Jelölje a Nap és a Föld sugarát R_{N} és R_{F}, távolságukat d_{NF}, a Föld középpontja és a teljes árnyék kúpjának csúcsa közötti távolságot pedig s.

A teljes árnyék kúpjának tengelyre illeszkedő síkkal való metszetében fellépő $SE_\mathrm{N}N$ és $SE_\mathrm{F}F$ hasonló derékszögű háromszögekből:

$$\frac{R_\mathrm{N}}{d_\mathrm{NF}+s} = \frac{R_\mathrm{F}}{s} \rightarrow s = \frac{R_\mathrm{F}}{R_\mathrm{N}-R_\mathrm{F}}\, d_\mathrm{NF} \qquad (2\,\mathrm{p})$$

A Konstanstáblázatból:

$$R_\mathrm{N} = 695\,500\,\mathrm{km},\;\; R_\mathrm{F} = 6371\,\mathrm{km}$$

Ezekkel és d_NF előbb meghatározott (zárójelben alternatív) értékével a kért formátumban:

$$\boxed{s = 1{,}406\cdot 10^6\,\mathrm{km}} \qquad (s = 1{,}405\cdot 10^6\,\mathrm{km}) \qquad (1\,\mathrm{p})$$

c) Vonalzóval néhány – szemmel „illesztett” – átmérő mentén (esetleg többször is) megmérve az árnyékkúp metszetét és a Hold egyik – például a legalsó – képét, azt kapjuk, hogy azok átmérője (az elfogadható hibákkal):

$$D_\mathrm{s} = 116 \pm 2\,\mathrm{mm} \text{ és } D_\mathrm{H} = 45 \pm 1\,\mathrm{mm} \qquad (2\,\mathrm{p})$$

A két átmérő aránya:

$$Q = \frac{D_\mathrm{s}}{D_\mathrm{H}} \approx 2{,}58 \pm 0{,}07 \qquad (1\,\mathrm{p})$$

A megengedett mérési hibák ugyanezen értékei mellett a D_s és D_H mért értéke a fentiektől némileg eltérő is lehet az alkalmazott nyomtató aktuális beállításaitól függően, mivel azonban csak az arányuk érdekes, ezért a Q értéke az irányadó.

Szintén a teljes árnyék kúpjának tengelyre illeszkedő síkkal való metszetében fellépő $SE_\mathrm{F}F$ és $SE_\mathrm{H}H$ hasonló derékszögű háromszögekből (d_FH jelöli a Föld és a Hold középpontjának keresett távolságát):

$$\frac{R_\mathrm{F}}{s} = \frac{|HE_\mathrm{H}|}{s-d_\mathrm{FH}} = \frac{QR_\mathrm{H}}{s-d_\mathrm{FH}} \rightarrow d_\mathrm{FH} = \frac{R_\mathrm{F}-QR_\mathrm{H}}{R_\mathrm{F}}\, s \qquad (2\,\mathrm{p})$$

Természetesen a $|HE_\mathrm{H}| = QR_\mathrm{H}$ egyenlőség csak közelítés, mivel a Q az árnyékkúp tengelyére merőleges metszetben méri az árnyék és a Hold sugarának arányát, de az NSE_N szög olyan kicsi ($< 0{,}3°$, a Nap Földről látszó átmérőjének fele egy felső korlátja), hogy ez a becslésnél nem számít.

Az érték és az átmérők mérésének hibájából eredő hiba a kért formátumban:

$$\boxed{d_\mathrm{FH} = 4{,}179\cdot 10^5 \pm 2{,}780\cdot 10^4\,\mathrm{km}} \qquad (3{,}901\cdot 10^5\,\mathrm{km} < d_\mathrm{FH} < 4{,}457\cdot 10^5\,\mathrm{km}) \qquad (1\,\mathrm{p})$$

Az s alternatív értékével:

$$d_\mathrm{FH} = 4{,}175\cdot 10^5 \pm 2{,}777\cdot 10^4\,\mathrm{km} \qquad (3{,}897\cdot 10^5\,\mathrm{km} < d_\mathrm{FH} < 4{,}452\cdot 10^5\,\mathrm{km})$$

A fogyatkozás közepekor a Föld és a Hold középpontjának tényleges távolsága 406 100 km volt.

A hibák számítását természetesen nem kérjük a versenyzőktől, azok tájékoztató jellegűek, a javítók munkájának könnyítését célozzák.

2. Gömbhalmazok párolgási idejének függése a tömegüktől/luminozitásuktól **45 p**

a) Vegyük a

$$t_\mathrm{p} = k_2 L^\gamma \varepsilon$$

összefüggés mindkét oldalának 10-es alapú logaritmusát:

$$\lg t_\mathrm{p} = \lg(k_2\varepsilon) + \gamma \lg L \qquad (1\,\mathrm{p})$$

A luminozitás és az abszolút bolometrikus fényesség közötti összefüggés:

$$M_\mathrm{bol} - M_{\mathrm{bol},\odot} = -2{,}5 \lg \frac{L}{L_\odot} \qquad (2\,\mathrm{p})$$

Közelítésként fogadjuk el ezt az összefüggést az abszolút vizuális fényességekre is, azaz:

$$M_V - M_{V,\odot} = -2{,}5 \lg \frac{L}{L_\odot} \qquad (1\,\mathrm{p})$$

Ebből a luminozitás:

$$L = 10^{0{,}4(M_{V,\odot} - M_V)} L_\odot \qquad (1\,\mathrm{p})$$

Az $\lg t_\mathrm{p}$-re vonatkozó összefüggésbe beírva, és az a és b jelöléseket (a és b konstansok) bevezetve:

$$\lg t_\mathrm{p} = \underbrace{-0{,}4\gamma}_{a} M_V + \underbrace{\lg(k_2\varepsilon) + \gamma \lg L_\odot + 0{,}4\gamma M_{V,\odot}}_{b} \qquad (1\,\mathrm{p})$$

Ezzel:

$$\boxed{\lg t_\mathrm{p} = a M_V + b} \qquad (2\,\mathrm{p})$$

Tehát az $L \propto \mathcal{M}$ feltevéssel és az $M_\mathrm{bol} \approx M_V$ közelítéssel az M_V és az $\lg t_\mathrm{p}$ között lineáris kapcsolat áll fenn.

b) Az első lépés az $\lg t_\mathrm{p}$ értékek kiszámolása, az illesztésnél ezek lesznek az y_i értékek, míg az M_V-k az x_i-k. Az $\lg t_\mathrm{p}$ értékek rendre:

12,09; 11,40; 11,79; 10,93; 11,41; 10,90; 10,87; 11,30; 11,39; 11,32; 11,38; 11,23; 11,17; 10,88

Egy-egy érték kiszámolása 0,5 pont, összesen: (7 p)

Az S_x, S_y, S_{xx}, S_{xy} és Δ segédparaméterek értékei rendre ($S = n = 14$):

$$S_x = -119{,}040, \;\; S_y = 158{,}056, \;\; S_{xx} = 1022{,}425, \;\; S_{xy} = -1347{,}598 \qquad (4\,\mathrm{p})$$

$$\Delta = 143{,}431, \;\; \chi^2 = 0{,}264 \qquad (2\,\mathrm{p})$$

Az illesztett egyenes a meredeksége és b tengelymetszete:

$$\boxed{a = -0{,}359 \pm 0{,}046} \qquad (1\,\mathrm{p})$$

$$\boxed{b = 8{,}241 \pm 0{,}396} \qquad (1\,\mathrm{p})$$

A hibák kiszámítását természetesen nem várjuk, azok itt csak tájékoztató jelleggel állnak.

c) Az R^2 kiszámításához szükséges segédösszegek:

$$SS_{\text{res}} = \chi^2 = 0{,}264,\ SS_{\text{tot}} = 1{,}581 \qquad (2\,\text{p})$$

Ezekkel az R^2:

$$\boxed{R^2 = 0{,}833} \qquad (1\,\text{p})$$

d) A γ paraméter az a meredekségből a

$$\gamma = \frac{a}{-0{,}4} = -2{,}5a \qquad (1\,\text{p})$$

formulával adódik.

Számértékekkel:

$$\boxed{\gamma = 0{,}896 \pm 0{,}116} \qquad (1\,\text{p})$$

A hiba kiszámítását természetesen nem várjuk, az itt csak tájékoztató jelleggel áll.

e) A következő oldalon láthatóhoz hasonló ábrát várunk milliméterpapíron. (Az ábrán már szerepel a következő feladatrész megoldása is.)

Vízszintes tengely skálázása: (1 p)

Vízszintes tengely felirata: (1 p)

Függőleges tengely skálázása: (1 p)

Függőleges tengely felirata: (1 p)

Ábra címe: (1 p)

Adatpontok ábrázolása: (3 p)

Az illesztett egyenes ábrázolása: (1 p)

Az illesztett egyenes egyenletének ábrára írása: (1 p)

f) A távolságmodulusra vonatkozó formula alapján az NGC 1261 abszolút vizuális fényessége (a d távolságot parszekben megadva):

$$M_{V,\text{NGC1261}} = m_{V,\text{NGC1261}} + 5 - 5\lg d_{\odot,\text{NGC1261}} \qquad (1\,\text{p})$$

Számértékekkel:

$$M_{V,\text{NGC1261}} = -7{,}76^{\text{m}} \qquad (1\,\text{p})$$

Ebből az illesztett egyenes a meredekségét és b tengelymetszetét felhasználva:

$$\lg t_{\text{p,NGC1261}} = 11{,}02 \qquad (1\,\text{p})$$

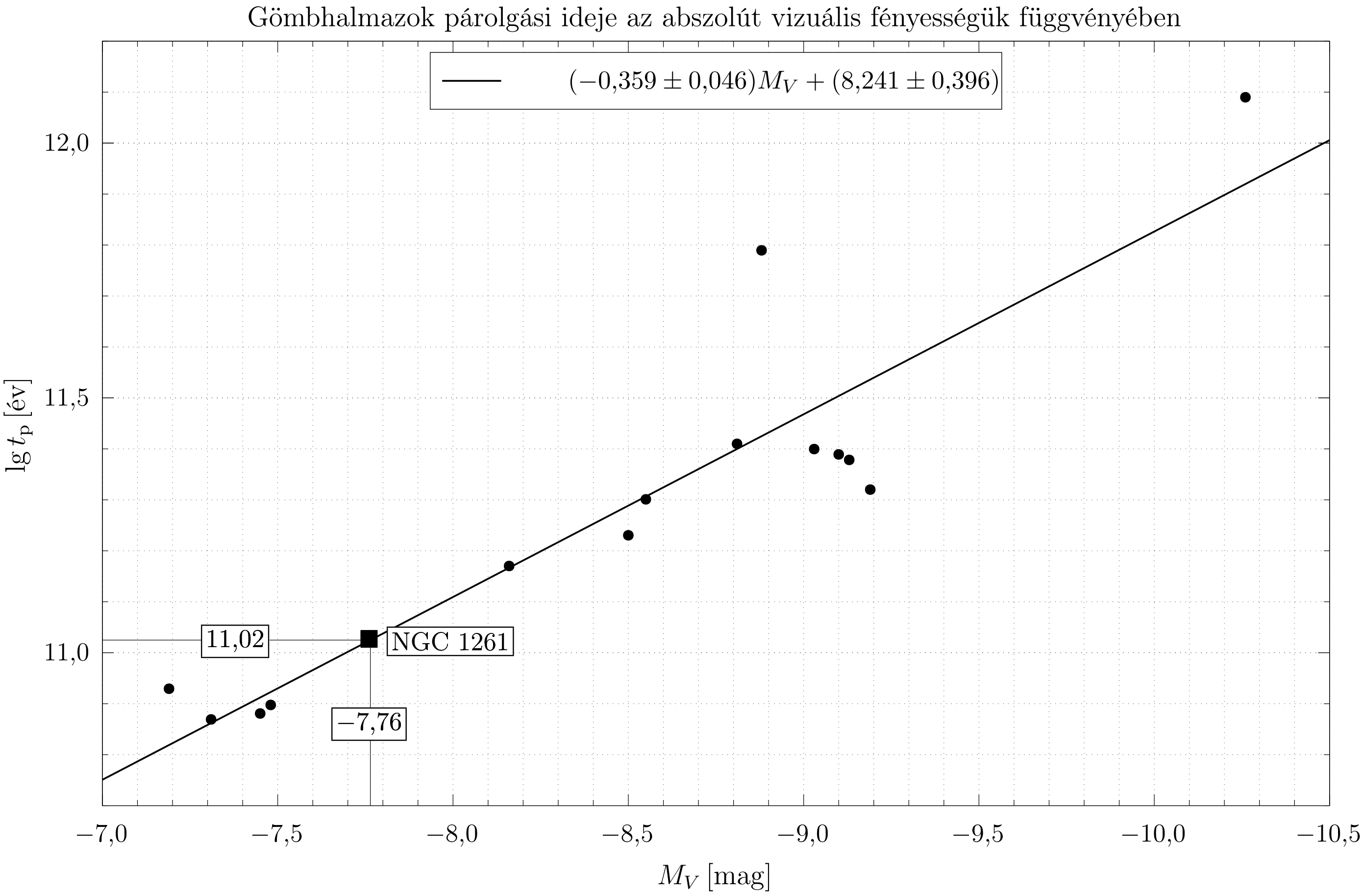
Ebből pedig:

$$\boxed{t_{\text{p,NGC1261}} = 1{,}06 \cdot 10^{11}\ \text{év}} \qquad (1\,\text{p})$$

A pont jelölése az ábrán: (1 p)

A pont címkézése: (1 p)

A pont koordinátáinak megadása az ábrán: (1 p)



Gömbhalmazok párolgási ideje az abszolút vizuális fényességük függvényében
$(-0{,}359 \pm 0{,}046)M_V + (8{,}241 \pm 0{,}396)$
11,02
NGC 1261
−7,76
12,0
11,5
11,0
$\lg t_{\mathrm{p}}$ [év]
−7,0
−7,5
−8,0
−8,5
−9,0
−9,5
−10,0
−10,5
M_V [mag]