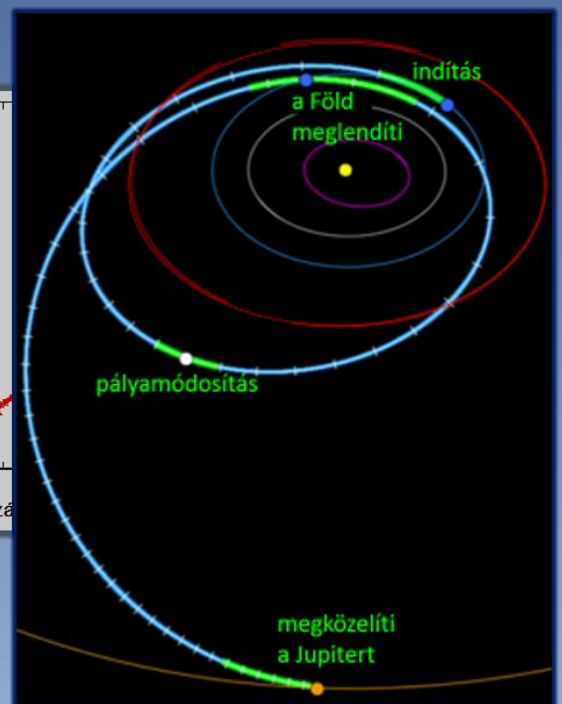
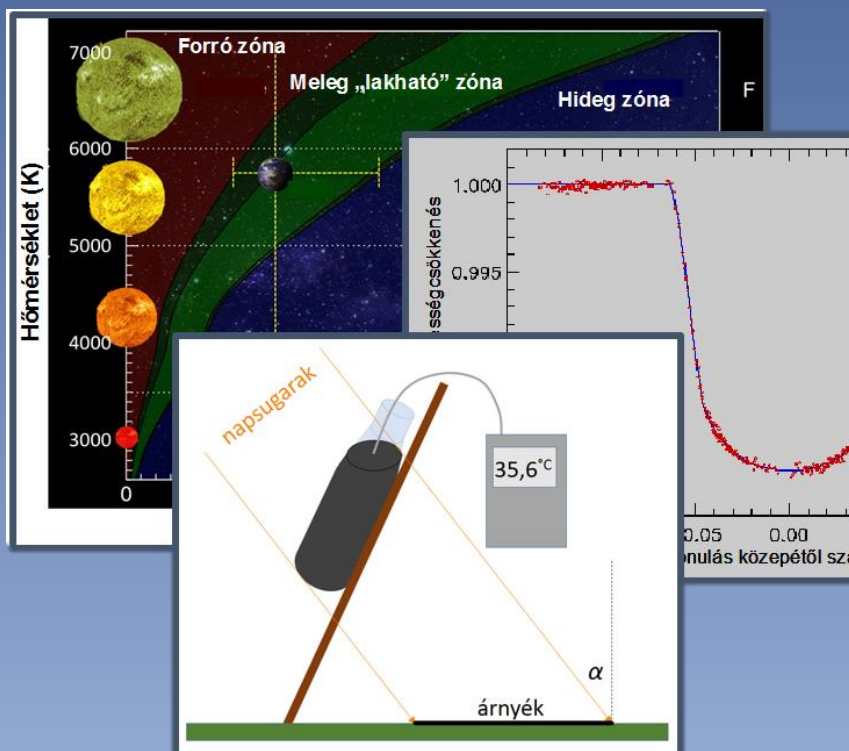


Gróf Andrea  
Horváth Zsuzsa

# EXOBOLYGÓK ÉS ŪRESZKÖZÖK

Válogatott középiskolás feladatok  
a csillagászat és űrkutatás  
modern eredményeihez



**GRÓF ANDREA, HORVÁTH ZSUZSA**

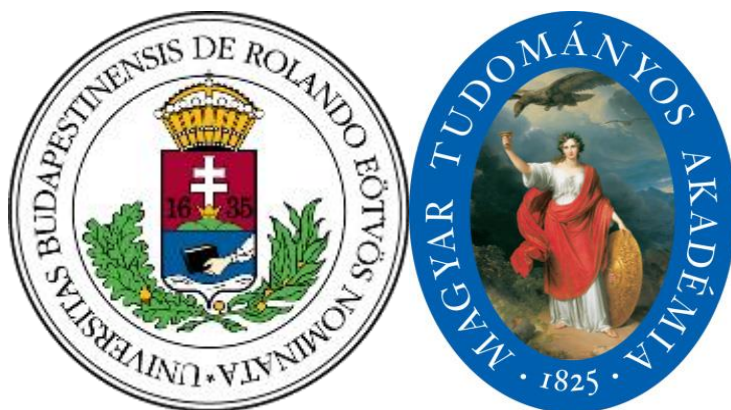
**EXOBOLYGÓK ÉS ŰRESZKÖZÖK**

**Válogatott középiskolás feladatok  
a csillagászat és űrkutatás  
modern eredményeihez**

**ELTE FIZIKA DOKTORI ISKOLA BUDAPEST**

**2021**

A kiadvány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia  
Tantárgypedagógiai Kutatási Programja támogatta



Szakmai lektor: Kovács József

Didaktikai lektor: Szeidemann Ákos

© Gróf Andrea, Horváth Zsuzsa

Kiadja az ELTE Fizika Doktori Iskola

Felelős Kiadó: Dr. Gubicza Jenő

Budapest 2021

*Második, javított kiadás 2017.*

Összeállította:

Gróf Andrea, Horváth Zsuzsa

Szakmai lektor:

Dr. Kovács József, ELTE Gothard Asztrofizikai Observatórium

A feladatgyűjtemény elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programja támogatta.

# Tartalom

<b>Bevezetés</b>	3
<b>Köszönetnyilvánítás</b>	3
<b>1. Exobolygók bemutatása</b>	
MÉRETEK ÉS TÁVOLSÁGOK	5
EXOBOLYGÓK LAKHATÓSÁGI ZÓNÁJA, A LAKHATÓSÁGI ZÓNA MODELLEZÉSE	8
KEPLER III. TÖRVÉNYE ÉS A GRAVITÁCIÓS TÖRVÉNY ALKALMAZÁSA EXOBOLYGÓKRA	11
<b>Megoldások 1.</b>	13
<b>2. Exobolygó-keresési módszerek</b>	
TRANZITMÓDSZER	19
DOPPLER-MÓDSZER	22
ASZTROMETRIAI MÓDSZER	25
<b>Megoldások 2.</b>	27
<b>3. Az űrkutatás és eszközei</b>	
FÖLDKÖZELI ASZTEROIDÁK ÉS EGYÉB APRÓ ÉGITESTEK	31
ŰRESZKÖZÖK ÁLTAL SZOLGÁLTATOTT ADATOK ÉRTELMEZÉSE ÉS ALKALMAZÁSA	33
MODERN MŰHOLDOK GEOMETRIÁJA	36
AZ ÉSZLELÉS FELBONTÁSÁNAK JAVÍTÁSA	38
<b>Megoldások 3.</b>	40
<b>4. Mérések, önálló tanulói tevékenységet kívánó feladatok</b>	
FELADATOK	44
<b>Megoldások 4.</b>	48
MELLÉKLETEK	51
<b>Irodalom</b>	53

# Bevezetés

Fontos, hogy a tanórákon is szerepeljenek a tudományos eredmények, amelyek sokszor különlegesebbek az emberi képzelet alkotásainál. Noha a tananyag növelése nélkül ez leginkább feladatokon keresztül valósítható meg, napjainkban a fizikaórákról egyre inkább kiszorulnak a feladatok. Nagy divat az úgynevezett konceptuális fizika, amely kerüli a mennyiségi összefüggések alkalmazását, enélkül tűzve ki a fogalmak és jelenségek alaposabb megértésének célját. Szorgalmazói a „hagyományos fizikatanítással” állítják szembe, amelyet képletek egyszerű közléseként, majd az azt követő behelyettesítésként festenek le. (Az angol nyelvű fizika szakmódszertani irodalomban sokszor negatív kicsengése van a „fejzetvégi feladatoknak”).

Mivel az oktatás eredményességének egyik fokmérője a tanultak sikeres összekapcsolása az előzetes tudással és alkalmazása új szituációkban [1], a feladatmegoldás nélkülözhetetlen a mélyebb megértéshez. Számos kutatás igazolja, hogy a feladatmegoldáskor szerzett tapasztalat pozitívan befolyásolja a kvalitatív kérdések sikeres megválaszolását is [2], [3]. A megismerés útját, a tudomány működését, az egyes felfedezések nehézségeit és tudománytörténeti jelentőségét is csak méréssel és számolással együtt lehet érzékeltetni.

Ezért annak lehetőségeit kutatva, hogy miként teremthető meg a csillagászat modern területeinek középiskolai interpretációja, olyan színes, napjaink csillagászati kutatásaihoz, eredményeihez kapcsolódó, de a középiskolai diákok felkészültségéhez illeszkedő, ugyanakkor az új fogalmak révén kihívást jelentő feladatokat kerestünk, melyek a problem-based learning megvalósítását segítik. A feladatmegoldás ugyanis sokkal több a behelyettesítésnél: az összefüggések alkalmazhatóságának és az alkalmazhatóság korlátainak felismerése, valamint annak megállapítása, hogy milyen változókra van szükség, és ezek értéke hogyan nyerhető a rendelkezésre álló információkból, amelyek sokszor nem közvetlenül, hanem táblázatban, grafikonon, képen vagy más módon vannak megadva.

Az itt szereplő nem szokványos feladatok témájuk alapján a tanulók érdeklődésére tarthatnak számot. Az érdeklődés felkeltését képek, rajzok is segítik, de a hangsúly a valóságos világ bemutatásán van, így a feladatok mindenütt valódi mérési adatokon alapulnak.

A tudományos-fantasztikus filmek és számítógépes játékok népszerűsége is mutatja, mennyire megmozgatja a fiatalok fantáziáját a távoli égitestek világa. Ezért arra számítunk, hogy a távoli csillagrendszerek exobolygóinak feladatok általi megismertetése (például a Jupiternél is nagyobb, de csillagához a Merkúrnál is közelebb keringve felforrósodó gázóriás, amely üstököscsóva módjára anyagot veszít, vagy éppen egy olyan bolygó, amelynek egén a Csillagok háborújából ismert Tatuin bolygóéhoz hasonlóan két nap ragyog) alkalmas lehet a tudományos eredmények középiskolai közvetítésére. A legtöbb feladat tehát ezt a témakört járja körül.

Az exobolygók tárgyalásakor kiemelt fontosságúak a felfedezésükhöz alkalmazott módszerek, melyeknek külön fejezetet szenteltünk. A legeredményesebbek, vagyis a tranzit- és a Doppler-módszer mellett foglalkozunk az asztrometriai módszerrel is, ahol a megfelelő érzékenység elérését a ma már működő Gaia űrtávcsőtől várják a kutatók. E módszerek segítségével nyomon követhetővé válhat a tudományos megismerés folyamata is, melynek során először egyre pontosabb műszerekkel megfigyeléseket végzünk, adatokat gyűjtünk, majd az adatok alapján felállított modellekkel végzett számítások eredményeit a tapasztaltakkal összehasonlítjuk.<sup>1</sup>

A bolygók tulajdonságaira (például felszíni hőmérsékletükre, légkörükre) nézve megállapított következtetések egyik fő iránya, hogy vajon elképzelhető-e rajtuk (földihez hasonló) élet. A lakhatóság kérdését a feladatokban leegyszerűsítjük arra, hogy az exobolygón tartósan jelen legyen a víz folyékony

<sup>1</sup> A kutatások eddigi két évtizedének gyümölcseként ma már közel négyezer exobolygó lényeges tulajdonságait ismerjük. Az iskolai oktatás szempontjából fontos tudni, hogy a mérési adatok nyilvánosak, a belőlük kapott eredmények folyamatosan frissülő adatbázisokban böngészhetők (pl. [exoplanet.eu](http://exoplanet.eu)).

állapotban. Ugyancsak e szempontból fontos a Naprendszer bolygóinak távolból való megfigyelhetősége is, sugallva, hogy nemcsak mi kereshetünk Földön kívüli (értelmes) életet. A példák bemutatják a távoli bolygórendszerek felfedezésének nehézségeit, amelyek nemhogy a Föld típusú bolygók, de már a Jupiterhez hasonló gázóriások esetében is jelentkeznek.

További fejezetbe gyűjtöttük össze a modern űreszközökkel kapcsolatos feladatokat. Ezt nemcsak az indokolja, hogy a Proxima Centauri körül a lakhatósági zónájában felfedezett exobolygó felveti a közeli csillagok már meglévő űreszközökkel való elérhetőségének kérdését. A Naprendszert bejáró egyre több űrszonda, illetve az űrtávcsövek eredményeire is e feladatokon keresztül kívánjuk felhívni a figyelmet. Megemlékezünk az egyik legrégebbiről, a már 40 éve kommunikáló Voyager–1 űrszondáról, de szerepelnek a feladatokban a legújabbak, a New Horizons és a Juno űrszonda is. Az űrtávcsövek, csakúgy mint a hagyományos feladatokban szintén nem szereplő földi rádiótávcsövek esetében megkerülhetetlen technikai kérdés a felbontás javítása. Napjaink elektronikai eszközöktől függő világában fontos a Nap, illetve a napkitörések megfigyelése is, így az e célra tervezett űreszközök is szerepelnek feladatainkban.

A fejezet másik feladatcsokra a szintén egyre inkább előtérbe kerülő aszteroida-kutatással, valamint eredményeivel foglalkozik. A média és a filmipar kedvenc témái közé tartoznak a kozmikus katasztrófák. Mivel sokszor indokolatlan félelmet keltenek a Föld közelében elhaladó kisbolygókról beszámoló hírek (hiszen legtöbbször a Hold pályáján kívül halad), a józan gondolkodást segíthetik a valószínűség-számítási módszert alkalmazó feladatok. Mindamellet ilyen események (mint például a cseljabinszki meteorbecsapódás) valóban történnek, így sok csillagvizsgáló elsődleges feladata a Föld közelében elhaladó aszteroidák feltérképezése. Több feladat foglalkozik tehát az aszteroidákkal, esetleges becsapódásuk következményeivel. Mutatunk példát létező becsapódási kráterre, és tárgyaljuk a lehetséges becsapódások megelőzésének kérdését is egy üstökösmagba lőtt tárgy képeinek segítségével.

Végül külön fejezetet szenteltünk az önálló tanulói tevékenységre irányuló, az inquiry-based learning elősegítésére alkalmas feladatoknak. Ezek a feladatok tehát nem a bemutatott csillagászati eredmények szempontjából, hanem módszertanilag szolgálhatnak új lehetőségekkel.

## **Köszönetnyilvánítás**

Köszönetet mondunk Dr. Tasnádi Péter tanár úrnak, aki sok hasznos tanáccsal segítette a munkát.

# 1. Exobolygók bemutatása

## MÉRETEK ÉS TÁVOLSÁGOK

**1.1** A legtöbb sci-fi-történet arra az előfeltevésre épül, hogy megoldódik a gyors csillagközi utazás problémája. A *Voyager-1* szonda 40 éves évfordulója a kérdésnek aktualitást ad. A jelenleg ismert technológiák azonban igen hosszú utazási időket jósolnak.

Ahogy egyre több exobolygót fedezünk fel, előbb-utóbb a közelben is találunk majd olyant, amelyik életre utaló jeleket mutat. Ekkor hamar igény támad majd arra, hogy emberes vagy ember nélküli űrmisszió tanulmányozza a földönkívüli életformát.

A következő táblázat néhány exobolygó adatait tartalmazza, köztük a tőlünk való távolságukat.

(a) Eddig a leggyorsabb ember nélküli űrhajó a *New Horizons* volt ( $v = 58320$  km/h), míg az ember által vezéreltek közül az *Apollo-10* sebessége volt a legnagyobb ( $v = 39896$  km/h). Mennyi idő alatt érhetnénk el ezekkel a sebességekkel a táblázatban szereplő legközelebbi exobolygóhoz?

(b) A mérnökök úgy gondolják, lehet olyan űrhajót készíteni, amelynek sebessége az 1000 km/s értéket is meghaladhatja. Meddig tartana ilyen űrhajóval az út a táblázatban szereplő közeli exobolygókhoz?

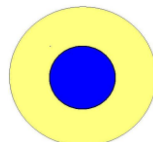
Név	Csillagkép	Távolság (fényév)	Csillagtól való távolság (CSE)	Tömeg (földtömeg)	Keringési idő
<b>Epsilon Eridani b</b>	Eridánusz	10,5	3,4	500	6,9 év
<b>Gliese-581g</b>	Mérleg	20,3	0,14	3,1	36 nap
<b>Gliese-674</b>	Oltár	14,8	0,04	12	4,7 nap
<b>Gliese-876d</b>	Vízöntő	15	0,02	8	1,9 nap
<b>Gliese-832b</b>	Daru	16,1	3,4	200	9,3 év
<b>Gliese-176</b>	Bika	31	0,07	25	8,7 nap
<b>Fomalhaut b</b>	Déli Hal	25	115	600	872 év
<b>61 Virginis b</b>	Szűz	28	0,05	5,1	4,2 nap

**1.2** Eleinte hatalmas, Jupiter méretű exobolygókat fedeztek fel a csillagászok, de ahogyan a mérési technológiák fejlődtek, már úgynevezett szuperföldeket is találtak, amelyek „csak” néhányszor nagyobbak a Földnél. (Ma már a Földnél kisebb exobolygókat is ismerünk, pl. Kepler-42d.)

Egy szuperföld nem feltétlenül hasonló a Földhöz. Lehet a Jupiterhez hasonló gázóriás, lehet jeges világ, mint az Uránusz vagy a Neptunusz, de lehet kőzetbolygó is, mint a Naprendszer belső bolygói. Hogy megtudjuk milyen típusú, milyen belső szerkezetű, milyen légköri összetételű egy felfedezett exobolygó, jól meg kell vizsgálni.

A kutatók először megállapítják az exobolygó tömegét és méretét (térfogatát). A tömeg, a térfogat és így a sűrűség ismeretében elég jól tudják modellezni a belső összetételét, szerkezetét. A modell készítése egy megfelelő mag-héj modell választásával kezdődik. (Ez nem jelenti az égitest belső szerkezetének, összetételének végleges meghatározását, csupán kiindulópont a további vizsgálódásokhoz.)

(a) Az exobolygók belső szerkezetének egy egyszerű modellje szerint tegyük fel, hogy elképzelt exobolygónk gömb alakú, tömör kőzetmagja van, míg a magon kívül levő köpenye vastag jégréteg. Mennyi az exobolygó sugara, ha a mag térfogata  $4,18 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$ , a köpenyé pedig  $2,92 \cdot 10^{13} \text{ km}^3$ ?



(b) Föld térfogata  $1,1 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$ . Az exobolygó magjának, illetve a köpenyének a térfogata hányszorosa a Föld térfogatának?

(c) Tegyük fel, hogy a szuperföldet felfedező csillagászok meg tudják határozni a tömegét is, és azt találják, hogy 8,3-szer akkora, mint a Föld tömege. Mennyi az exobolygó tömege és sűrűsége?

(d) Az exobolygónak a csillagától mért távolsága alapján feltételezzük, hogy a vastag köpeny szilárd jégből áll, amelynek sűrűsége  $900 \text{ kg/m}^3$ . Mennyi a bolygó magjának a sűrűsége?

**1.3** A Hubble-űrtávcső segítségével igazolták, hogy a 150 fényévnire a Pegazus csillagkép irányában található (Ozirisznek is nevezett) HD 209458b exobolygó 3,5 naponként kerüli meg a Naphoz hasonló tömegű csillagát. A gázóriás jóval a Merkúr pályájának távolságán belül, mindössze 0,047 CSE távolságban kering csillaga körül.

A Hubble COS spektrográfja vizet és nehéz elemeket, szén és szilíciumot is talált az exobolygó több ezer fokos légkörében. A hidrogén, a szén és a szilícium spektrumvonalainak vizsgálatára alapuló mérései olyan erős csillagszelet mutattak ki, amely üstököscsóvához hasonlóan elsodorja a lefűjt gázt. Vagyis a bolygó olyan közel kering csillagához, hogy annak sugárzása lefűjja az ürbe a bolygó légkörét.

Az exobolygó légkörének anyagvesztése  $4 \cdot 10^{11}$  g /s. Mennyi anyagot veszít az exobolygó

(a) egy nap alatt?

(b) egy év alatt?

(c) A Jupiter tömege  $1,9 \cdot 10^{27}$  kg , sugara pedig  $7,13 \cdot 10^7$  m . A HD 209458b tömege a Jupiter tömegének körülbelül 70%-a, míg sugara körülbelül 1,4-szer akkora, mint a Jupiteré. Mennyi a sűrűsége a Jupiternek, és mennyi a HD209458b exobolygónak?

(d) Tételezzük fel, hogy a Jupiterhez hasonlóan ennek az exobolygónak is van közetmagja, amelynek tömege a Föld tömegének 18-szorosa. Mennyi a HD 209458b légkörének a tömege?

(e) Mennyi ideig tart, amíg a HD 209458b teljesen elveszti légkörét, ha az anyagvesztés a megadott mértékben folytatódik?

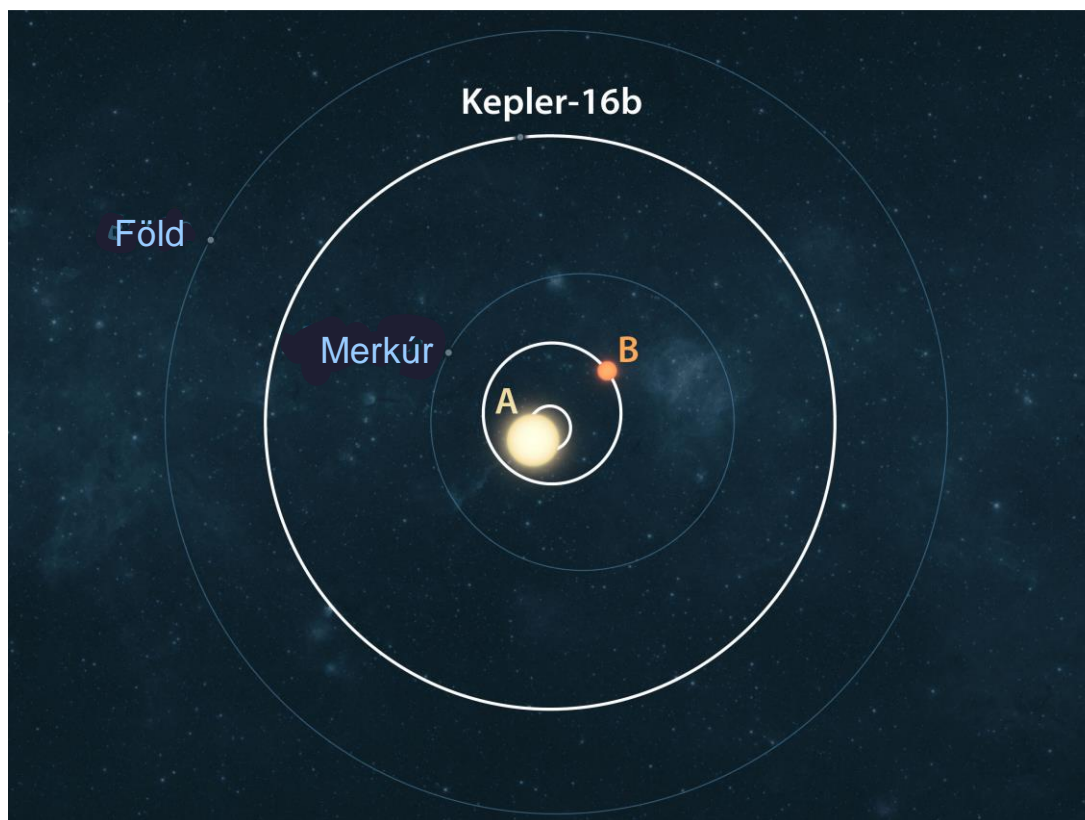
**1.4** A NASA Kepler-űrtávcsöve által felfedezett Kepler-16b bolygóról két nap látható az égen egy helyett. Galaxisunkban az eddig megismert bolygók közül a Kepler-16b hasonlít tehát leginkább a Csillagok háborúja című népszerű sci-fi filmből ismert Tatuin bolygóra, Luke Skywalker szülőbolygójára. A valóságban a Kepler-16b nem lakható, ugyanis nincs hideg, szilárd felszíne, de ahogyan a Tatuin, ez is két csillag körül kering.



© Wikipedia Commons  
Luke Skywalker nézi a kettős naplementét.

A kettőscsillag (a nagyobb Kepler-16A és a kisebb Kepler-16B) 200 fényévnire található, a Hattyú csillagkép irányában. A Kepler-16B nevű kisebb csillag 0,2 CSE = 30 millió km távolságra, körpályán kering nagyobb tömegű társa körül. A két csillag átmérője 890000 km illetve 300000 km.

A Kepler-16b exobolygó a Kepler-16A körül kering 0,7 CSE = 105 millió km távolságra. A pályája alig tér el a körtől.



- (a) Képzeljük el, hogy a „Tatuin” felszínén állunk és nézzük a két csillagot az égen, ahogyan Luke Skywalker nézte ikernapjait naplementekor. Adjuk meg azt a legnagyobb szögtávolságot, amennyire a Tatuinról nézve a két csillag eltávolodhat egymástól.
- (b) Abban az időpontban, amikor a csillagok legmesszebbre távolodnak egymástól az égen, milyen szög alatt látszanak az átmérőik a Tatuinról?

# 1. Exobolygók bemutatása

## EXOBOLYGÓK LAKHATÓSÁGI ZÓNÁJA, A LAKHATÓSÁGI ZÓNA MODELLEZÉSE

**1.5** Azt a zónát nevezik lakhatósági zónának egy csillag körül, ahol egy kőzetbolygó felszínén a víz tartósan megmaradhat folyékony állapotban, azaz (földihez hasonló körülmények esetén) a hőmérséklet 273 K és 373 K között van. E tartománynak az elhelyezkedése függ a csillag energiakibocsátásától. Minél fényesebb a csillag, annál több energiát ad át bolygójának, így egy nagyobb fényerejű csillag körül a bolygó felszíne is magasabb hőmérsékletű.

A következő táblázat a bolygók felszíni hőmérsékletét mutatja kelvinben a csillag fényességének (luminozitás,  $L$ ) és a bolygó csillagtól mért  $d$  távolságának függvényében. A csillag fényessége a Nap fényességéhez viszonyítva, a távolság pedig csillagászati egységben van megadva.

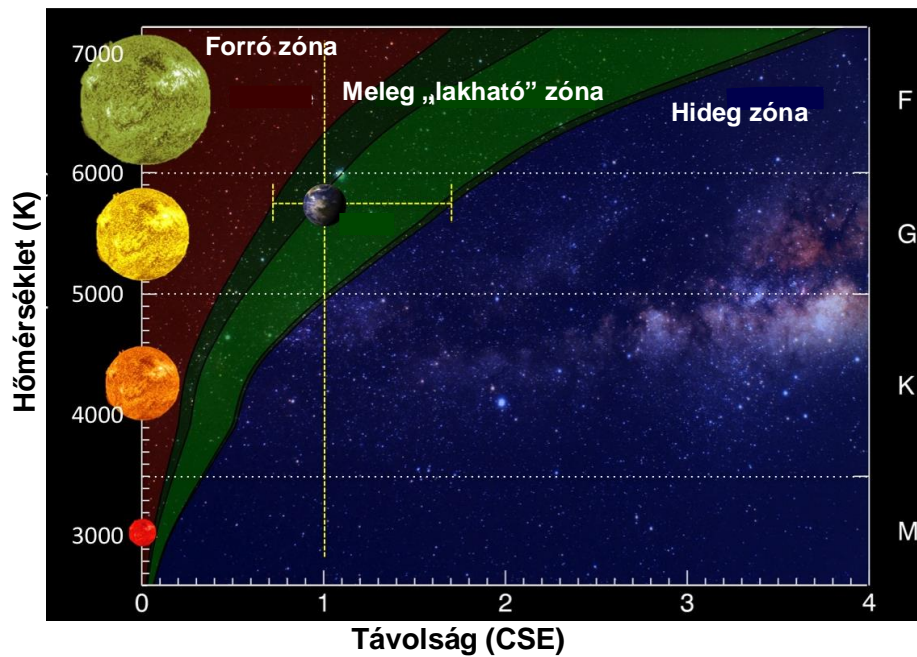
A hőmérsékletszámítás alapjául szolgáló modell feltételezi, hogy az exobolygó albedója (fényvisszaverő képessége) a Földéhez hasonló és a széndioxid-koncentráció is megegyezik a földi értékkel.

$L/d$	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2
0,1	361	255	209	181	162	147	136	126	120	114	109	104	100	97	93	90
0,5	540	382	312	270	242	220	204	191	180	171	163	156	150	144	139	135
1	642	454	371	321	287	262	243	227	214	203	194	185	178	172	166	161
1,5	711	503	410	355	318	290	269	251	237	225	214	205	197	190	184	178
2	764	540	441	382	342	312	289	270	255	242	230	220	212	204	197	191
2,5	808	571	466	404	361	330	305	286	269	255	243	233	224	216	209	202
3	845	598	488	423	378	345	319	299	282	267	255	244	234	226	218	211
3,5	878	621	507	439	393	359	332	311	293	278	265	254	244	235	227	220
4	908	642	524	454	406	371	343	321	303	287	274	262	252	243	235	227
4,5	935	661	540	468	418	382	354	331	312	296	282	270	259	250	242	234
5	960	679	554	480	429	392	363	340	320	304	290	277	266	257	248	240
5,5	983	695	568	492	440	402	372	348	328	311	297	284	273	263	254	246
6	1005	711	580	503	450	410	380	355	335	318	303	290	279	269	260	251
6,5	1025	725	592	513	459	419	388	363	342	324	309	296	284	274	265	256
7	1045	739	603	522	467	426	395	369	348	330	315	302	290	279	270	261

- (a) Minden egyes luminozitás-értéknél színezzük be azokat a hőmérséklet-értékeket, amelyek közel vannak vagy beleesnek abba a tartományba, amelyben a víz folyékony.
- (b) Hogyan változik a lakhatósági zóna a csillag fényességének növekedésével?
- (c) Naprendszerünkben e modell szerint melyik bolygó tartozik a lakhatósági zónába?
- (d) Számítsuk ki a Nap ( $L = 1$ ) lakhatósági zónájának területét e modell szerint.

Megjegyzés:

Az ábra különböző hőmérsékletű, ezáltal különböző fényerejű csillagok lakhatósági zónáját mutatja a csillagtól mért távolság függvényében. A zöld színű rész felel meg a lakhatósági zónának. Egyes modellek szerint a zöld sáv határánál elhelyezkedő sötétkék területek is beletartozhatnak a lakhatósági zónába. A bordó részbe tartozó exobolygók túl forrók, míg a kékkel színezett részbe tartozók túl hidegek ahhoz, hogy a víz folyékony maradjon tartósan rajtuk. Láthatjuk a Földet is berajzolva a lakhatósági zóna belső határához közel.



<http://spacemath.gsfc.nasa.gov>

**1.6** A csillagászok közel 4000 exobolygót fedeztek fel közeli csillagok körül. Ha felfedeznek egyet, megvizsgálják azt is, hogy létezhet-e a felszínén folyékony víz. A csillagászok által lakhatósági zónának nevezett tartományban keringő bolygón olyanok a hőmérsékleti viszonyok, hogy felszínén (földihez hasonló körülmények esetén) a víz tartósan megmaradhat folyékony állapotban. Naprendszerünkben a Merkúr és a Vénusz közel van a Naphoz, olyan meleg a felszínük, hogy a víz nem maradhat folyékony állapotban rajtuk, elpárologna a felszínükről. A Marson és a messzebb lévő bolygókon pedig a víz jéggé fagy. Földünk a Nap lakhatósági zónájában kering.

Egy egyszerű modell szerint egy naptömegben kifejezve  $M$  tömegű csillagtól  $D$  csillagászati egység távolságra keringő bolygó felszínén megfagy a víz, ha

$$M - 0,8D \leq 0,12.$$

(a) Ábrázoljuk az egyenlőtlenséget! A függőleges tengelyen mérjük a csillag tömegét naptömegben,  $[0,0; 2,0]$  intervallumban, a vízszintes tengelyen pedig a bolygónak a csillagtól való távolságát csillagászati egységben,  $[0,0; 3,0]$  intervallumban, egytizedes lépésközzel. Színezzük zöldre a fagyáspont alatti tartományt.

(b) A bolygó felszínén felforr a víz, ha

$$M - 1,2D \geq 0,18.$$

Színezzük kékre a forráspont feletti tartományt.

(c) A túl magas vagy túl alacsony hőmérsékleten kívül a kötött keringés is lakhatatlanná tehet egy bolygót. Kötött keringésről akkor beszélünk, ha az égitest forgási és keringési periódusa megegyezik. Ilyen esetben a bolygó mindig ugyanazt a felét fordítja a csillaga felé, így ezen az oldalán mindig nappali világosság (és forróság), míg másik oldalán örök éjszakai sötétség és az ezzel járó nagyon alacsony hőmérséklet valószínűsíthető. Légkörrel rendelkező, kötött keringésű bolygóknál igen nagy sebességű szelek csökkenthetik ugyan a két oldal közötti hőmérsékletkülönbséget, de a bolygó még így sem válik lakhatóvá.

Az exobolygó kötötten kering csillaga körül, ha

$$M - 3,3D \geq -1,3$$

Színezzük pirosra azt a tartományt, ahol a bolygó kötött keringést végez. Mit mondhatunk a be nem színezett területről?

(d) A következők közül melyik elképzelt exobolygó kering csillaga lakhatósági zónájában?

Lehel :  $D = 2,0$  CSE,  $M = 1M_{\text{Nap}}$

Hádész:  $D = 0,5$  CSE,  $M = 2M_{\text{Nap}}$

Óceánia:  $D = 2,0$  CSE,  $M = 2M_{\text{Nap}}$

Megjegyzés:

1. A Kepler-űrtávcső mérései alapján úgy gondoljuk, hogy a Tejútrendszer százmilliárdnyi csillaga között az a ritka, amelyiknek nincs bolygókísérője, így akár milliárdnyi exobolygó is lehet csak a mi Galaxisunkban, és köztük szintén nagy számú lakható lehet. Ezek az exobolygók az elsődleges célpontjai a Naprendszeren kívüli asztrobiológiai kutatásoknak, rajtuk keressük a földihez hasonló életet.

2. Angolul a lakhatósági zónában keringő exobolygókat, „Goldilock bolygóknak” nevezik. A név az *Aranyfürtöcske és a három medve* című mesében szereplő kislányra utal, aki egy medvecsalád otthonában kóstolgatta a medvék kását. A medvepapáét túl melegnek, a medvemamáét túl hidegnek, míg a medvebocsét pont megfelelőnek találta, nem volt sem túl forró, sem túl hideg.

**1.7** Ahhoz, hogy egy bolygó felszínén a folyékony víz tartósan létezhesen, az exobolygónak elég közel kell lennie csillagához, hogy a jég megolvadjon rajta, de nem túl közel, hogy a víz gőzzé ne váljon a felszínén. A megfelelő tartományt nevezzük lakhatósági zónának.

Egy egyszerű modell alapján az exobolygó hőmérséklete a következő képletből számolható:

$$T = 0,6 \cdot T_{\text{eff}} \cdot \sqrt{\frac{R}{d}}$$

ahol  $T_{\text{eff}}$  a csillag effektív hőmérséklete kelvinben,  $R$  a csillag sugara,  $d$  az exobolygónak a csillagától mért átlagos távolsága.

(a) Egy, a Napunkkal megegyező hőmérsékletű és sugarú csillagtól ( $T_{\text{eff}} = 5770$  K, és  $R = 700000$  km) milyen távolsághatárokon belül megfelelő a hőmérséklet egy exobolygón ahhoz, hogy felszínén a víz folyékony állapotban létezhesen? Tételezzük föl, hogy a bolygón a földihez hasonló körülmények uralkodnak.

(b) Lakható-e ez alapján a Föld? Miért?

(c) A déli féltékéről látható Canopus ( $\alpha$  Carinae) az égbolt második legfényesebb állócsillaga. Hőmérséklete 7000 K, és 70-szer nagyobb sugarú, mint a Nap. A földihez hasonló körülmények között milyen tartományban maradhat meg körülötte egy exobolygó felszínén a víz folyékony állapotban? Hasonlítsuk össze a számított zóna helyzetét a Naprendszer bolygóinak pályasugaraival.

### 1.8 (Diákolimpiai szakköri feladat)

Egy exobolygó  $e = 0,2$  excentricitású,  $a = 4$  CSE fél nagytengelyű pályán kering. A csillag lakhatósági zónája  $r_{\text{belső}} = 3$  CSE és  $r_{\text{külső}} = 4$  CSE között húzódik. Számítsuk ki, hogy a bolygó a keringési időnek hány százalékát tölti a lakhatósági zónában.

# 1. Exobolygók bemutatása

## KEPLER HARMADIK TÖRVÉNYE ÉS A GRAVITÁCIÓS TÖRVÉNY ALKALMAZÁSA EXOBOLYGÓKRA

**1.9** A CoRoT-2a nevű csillag 880 fényévnire található a Sas csillagkép irányában. CoRoT-2b-nek nevezett bolygója a Jupiternél 1,4-szer nagyobb gázbolygó, tömege pedig háromszor akkora, mint a Jupiteré. A bolygó 1,7 napos periódussal kering a csillag körül, mindössze 5 millió km-re, olyan közel, hogy a felső légkörét 1500 K fokra fűti fel a csillag sugárzása.

(a) A Nappal összehasonlítva mekkora a CoRoT-2a csillag tömege? A Naprendszer bolygóinak távolságával összehasonlítva hol kering körülötte a CoRoT-2b exobolygó?

(b) Egy egyszerű modell szerint a bolygó légköre a tömegének 50%-a. A Jupiter tömege a Föld tömegének 315-szöröse,  $1,9 \cdot 10^{27}$  kg. A CoRoT-2b másodpercenként körülbelül 5 millió tonna anyagot veszít csillagának sugárzása következtében. Mennyi idő múlva veszíti el teljes légkörét a bolygó, ha feltételezzük, hogy a párolgás mindvégig a fentiekben megadott ütemű marad?

**1.10** (A Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpia feladata, 2015.)

A GJ 876 ( $M_{GJ876} = (0,33 \pm 0,03)M_{Nap}$ ) csillag körül felfedeztek néhány exobolygót, amelyeknek adatait láthatjuk a következő táblázatban, ahol  $M_N$  a Nap tömege,  $m_F$  a Föld tömege és  $m_J$  a Jupiter tömege ( $m_J = 1,8913 \cdot 10^{27}$  kg). Tételezzük fel, hogy az exobolygók ugyanabban az irányban keringenek a GJ 876 csillag körül. Két bolygóról akkor mondjuk, hogy rezonanciában van, ha a keringési idejük hányadosai jó közelítéssel kis egész számok hányadosai. Keressünk a GJ 876 rendszerben rezonanciában levő exobolygókat.

GJ 876 rendszer	Tömeg	Fél nagytengely (CsE)
GJ 876b	$2.276 m_J$	0.2083
GJ 876c	$0.714 m_J$	0.1296
GJ 876d	$6.8 m_F$	0.0208
GJ 876e	$15 m_F$	0.334

**1.11** A közeli Gliese-581 vörös törpe csillag tőlünk 20 fényévnire a Mérleg csillagkép irányában található. „Zsúfolt” rendszerében hat bolygó kering. A Gliese-581g exobolygó tömege mindössze háromszorosa a Föld tömegének, így valószínűleg inkább kőzetbolygó, mint gáziás. A bolygó 37 napos periódusú kötött keringést végez csillaga körül, tehát mindig ugyanazt az oldalt mutatja csillaga felé: egyik féltekéjén állandóan nappal van, míg a másikon örök éjszaka.

(a) Rajzoljunk modellt a Gliese-581 bolygórendszeréről. Legyen a rajzon 1 cm a 0,01CSE-nek megfelelő távolság, és az egyes exobolygók korongjának sugaránál 1 mm feleljen meg 5000 km-nek. Használjuk a következő táblázat adatait:

Bolygó	Felfedezés éve	Csillagtól való távolság (CSE)	Keringési idő (nap)	Átmérő (km)
Gliese-581b	2005	0,041	5,37	50000
Gliese-581c	2007	0,072	12,9	20000
Gliese-581d	2007	0,22	66,9	25000
Gliese-581e	2009	0,028	3,15	15000
Gliese-581f	2010	0,76	433	25000
Gliese-581g	2010	0,15	36,6	20000

(b) Határozzuk meg a Gliese 581 tömegét.

**1.12** A több mint nyolcmilliárd éves Kepler-10 csillag körül 2,5 millió kilométer távolságban 20 órás periódusidővel keringő földméretű Kepler-10b exobolygót 2010-ben fedezték fel a Kepler-űrtávcső segítségével a Sárkány csillagkép irányában, tőlünk 560 fényévyire. A bolygó felszíni hőmérséklete meghaladja az 1500 kelvint. Tanulmányozva az exobolygó tranzitját (csillaga előtti átvonulását, illetve az ebből adódó fényességcsökkenést), a Kepler-10b méretét 1,4-szer nagyobbak találták a Földénél. Átlagos sűrűsége  $8,8 \text{ g/cm}^3$ , amely nagyobb, mint a vas sűrűsége, a Föld felszínén levő szilíciumban gazdag rétegek sűrűségének pedig háromszorosa.

(a) Mennyi a Kepler-10b tömege?

(b) Mennyi a gravitációs gyorsulás a Kepler-10b exobolygón?

(c) Mennyi a súly a egy 60 kg-os embernek a Földön, illetve a Kepler-10b exobolygón?

## Megoldás 1.

**1.1** (a) A táblázatban szereplő exobolygók közül az Epsilon Eridani b van hozzánk a legközelebb, 10,5 fényévre.

$$10,5 \text{ fényév} = 10,5 \cdot 9,46 \cdot 10^{12} = 9,9 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

Az ember nélküli űrhajó sebességével

$$t_1 = \frac{9,9 \cdot 10^{13}}{58320} = 1,7 \cdot 10^6 \text{ h} \approx 190000 \text{ év}$$

alatt érnék az Epsilon Eridani b exobolygóhoz.

Az ember által vezérelt űrjármű sebességével

$$t_2 = \frac{9,9 \cdot 10^{13}}{39896} = 2,5 \cdot 10^9 \text{ h} \approx 280000 \text{ év}$$

alatt jutnánk oda.

(b) Az 1000 km/s sebességű űrhajó sebessége a fénysebesség 1/300 része, egy fényévnnyi távolságot tehát 300 év alatt tesz meg.

A következő táblázat tartalmazza az 1000 km/s sebességgel számolt időtartamokat.

Név	Távolság (fényév)	Utazás időtartama (év)
$\epsilon$ Eridani b	10,5	3150
Gliese-581g	20,3	6090
Gliese-674	14,8	4440
Gliese-876d	15	4500
Gliese-832b	16,1	4830
Gliese-176	31	9300
Fomalhaut b	25	7500
61 Virginis b	28	8400

Megjegyzés:

A hozzánk legközelebbi hármás csillagrendszerhez, az Alfa Centaurihoz tartozó Proxima Centauri csillag körül is fedeztek fel exobolygót, mégpedig a lakhatósági zónában. Ehhez a tőlünk 4,3 fényévnnyire lévő, Földhöz hasonló méretű exobolygóhoz is körülbelül 1300 évig tartana az út.

**1.2** (a) A teljes térfogat:

$$V = 4,18 \cdot 10^{12} + 2,92 \cdot 10^{13} = 3,34 \cdot 10^{13} \text{ km}^3$$

Feltételezve, hogy gömb alakú,

$$\frac{4}{3} \pi \cdot R^3 = 3,34 \cdot 10^{13} \text{ km}^3$$

$$R = 2,00 \cdot 10^4 = 20000 \text{ km}$$

(b) 
$$\frac{V_{\text{mag}}}{V_{\text{Föld}}} = \frac{4,18 \cdot 10^{12}}{1,1 \cdot 10^{12}} = 3,8 \approx 4$$

Az exobolygó magjának a térfogata a Földének körülbelül négyszerese.

$$\frac{V_{\text{köpeny}}}{V_{\text{Föld}}} = \frac{2,92 \cdot 10^{13}}{1,1 \cdot 10^{12}} = 26,5 \approx 30$$

A köpeny térfogata pedig a Földének közel 30-szorosa.

(c) Az exobolygó tömege:

$$m = 8,3 \cdot 5,9 \cdot 10^{24} = 4,9 \cdot 10^{25} \text{ kg}$$

Az exobolygó sűrűsége:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4,9 \cdot 10^{25}}{3,34 \cdot 10^{22}} = 1500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Megjegyzés:

Bár az 1500 kg/m<sup>3</sup> sűrűség nem sokkal több a jég sűrűségénél, az exobolygónak mégis jókora, jóval nagyobb sűrűségű magja van.

(d) 
$$m_{\text{mag}} = m - m_{\text{köpeny}} = m - V_{\text{köpeny}} \cdot \rho_{\text{köpeny}} = 4,9 \cdot 10^{25} - 2,92 \cdot 10^{13} \cdot 10^9 \cdot 900 = 2,4 \cdot 10^{25} \text{ kg}.$$

Az exobolygó magjának sűrűsége

$$\rho_{\text{mag}} = \frac{m_{\text{mag}}}{V_{\text{mag}}} = \frac{2,4 \cdot 10^{25}}{4,18 \cdot 10^{12} \cdot 10^9} = 5700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Ez a sűrűségérték közetmagra utal.

**1.3** (a) 1 nap = 86400 s alatt

$$4 \cdot 10^{11} \frac{\text{g}}{\text{s}} \cdot 86400 = 3,5 \cdot 10^{16} \text{ g} = 3,5 \cdot 10^{10} \text{ t}$$

anyagot veszít az HD 209458b exobolygó.

(b) Egy év alatt az anyagvesztése

$$3,5 \cdot 10^{10} \cdot 365 = 1,3 \cdot 10^{13} \text{ t}.$$

(c) A bolygók közel gömb alakúak, így a Jupiter térfogata

$$V_J = \frac{4}{3} \pi \cdot (7,13 \cdot 10^7)^3 = 1,5 \cdot 10^{24} \text{ m}^3$$

A Jupiter sűrűsége

$$\rho_J = \frac{m_J}{V_J} = \frac{1,9 \cdot 10^{27}}{1,5 \cdot 10^{24}} = 1267 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Az exobolygó sűrűsége:

$$\rho = \frac{0,7 M_J}{(1,4)^3 V_J} = 323 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Megjegyzés:

A HD 209458b az egyik legkisebb sűrűségű exobolygó.

(d) Az exobolygó tömege

$$m = 0,7 \cdot M_J = 1,3 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

A légkör tömege

$$m_{\text{légkör}} = m - 18 \cdot M_F =$$

$$1,3 \cdot 10^{27} - 18 \cdot (5,9 \cdot 10^{24}) = 1,2 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

$$(e) t = \frac{1,2 \cdot 10^{27}}{1,3 \cdot 10^{16}} = 9,2 \cdot 10^{11} \text{ év}$$

Megjegyzés:

Az exobolygó anyagvesztésének mértéke hatalmasnak tűnik, de a kapott 920 milliárd év majdnem 70-szerese az Univerzum életkorának. Kevés kivétellel a bolygók képesek túlélni a csillagukat (kb. 10–20 milliárd élettartam) még ilyen nagymértékű anyagvesztés ellenére is.

**1.4** (a) A kérdéses helyzetben, a két csillag és az exobolygó egy derékszögű háromszög csúcsait alkotják, amelynek átfogója a nagyobb tömegű csillag és az exobolygó, az egyik befogója pedig a két csillag távolsága:

$$\sin \varphi = \frac{30}{105} = 0,286, \text{ ahonnan } \varphi = 17^\circ.$$

(b) A Kepler-16A átmérője 890000 km és 105 millió méterre van az exobolygótól.

Így a Tatuinról

$$\alpha = \frac{0,89}{105} = 0,0085 \text{ rad} = 0,49^\circ$$

alatt látszik.

(c) Pitagorasz tételével a Kepler-16B távolsága:

$$d^2 = 105^2 - 30^2, \text{ ahonnan}$$

$$d = 101 \text{ millió km.}$$

$$\beta = \frac{0,30}{101} = 0,0030 \text{ rad} = 0,17^\circ$$

Összehasonlításképpen: a Földről a Nap és a Hold körülbelül  $0,5^\circ$  alatt látszik, a Kepler-16A látszólagos mérete kb. ugyanekkora, a Kepler-16B csillagé sokkal kisebb.

**1.5** (a) A táblázat egy megfelelő színezést mutat.

(Egy-egy cella erejéig a víz fagyáspontját és forráspontját lehet le- vagy felkerekíteni is.)

(b) Ahogyan a csillagok luminozitása növekszik, egyre távolabb helyezkedik el tőlük a lakhatósági zóna, és a tartomány szélessége is növekszik.

(c) A Vénusz és a Föld.

Modellünk egyszerűségét mutatja, hogy a Vénuszt is lakhatónak tartja, mivel nem számol az üvegházhatással.

(d) A keresett tartomány a

$$t = \pi \cdot (r_k^2 - r_b^2)$$

területű körgyűrű, ahol  $r_k$  a lakhatósági zóna külső sugara,  $r_b$  a belső sugara.

A táblázat  $L = 1$  sorában kiszínezett értékekből

$$r_b = 0,6 \text{ CSE és}$$

$$r_k = 1,2 \text{ CSE}$$

olvasható ki, így a keresett terület

$$t = \pi \cdot (1,2^2 - 0,6^2)^2 =$$

$$= 7,6 \cdot 10^{12} \text{ km}^2$$

Megjegyzés:

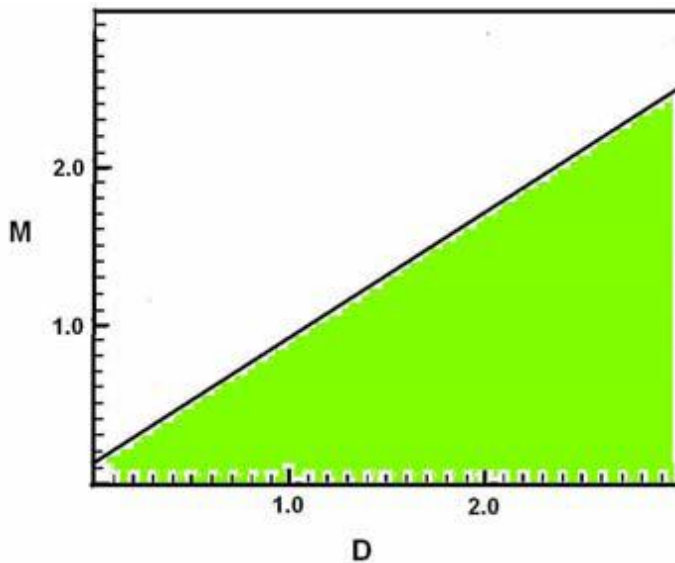
Jobban megnézve a lakhatósági zóna külső határát, az 1,1 CSE érték jobb közelítése a víz fagyáspontjának (273 K). Ezzel az értékkel számolva

$$t = \pi \cdot (1,1^2 - 0,6^2)^2 =$$

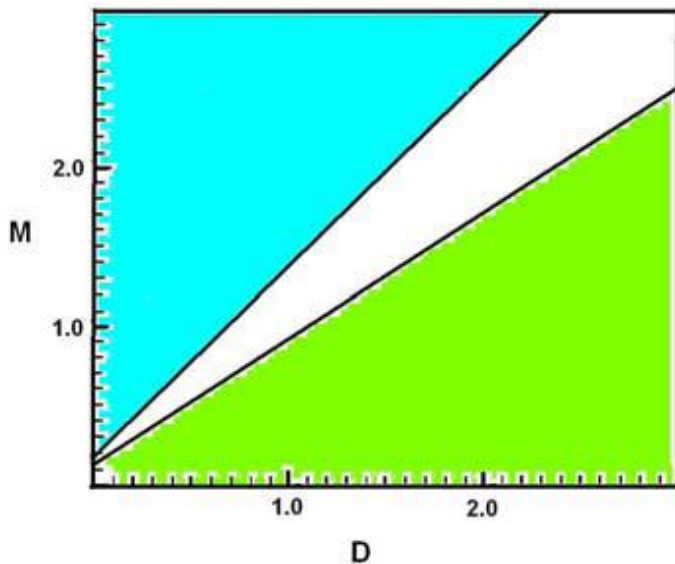
$$= 2,7 \cdot (150000000)^2 = 6 \cdot 10^{12} \text{ km}^2$$

L\d	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2
0,1	361	255	209	181	162	147	136	126	120	114	109	104	100	97	93	90
0,5	540	382	312	270	242	220	204	191	180	171	163	156	150	144	139	135
1	642	454	371	321	287	262	243	227	214	203	194	185	178	172	166	161
1,5	711	503	410	355	318	290	269	251	237	225	214	205	197	190	184	178
2	764	540	441	382	342	312	289	270	255	242	230	220	212	204	197	191
2,5	808	571	466	404	361	330	305	286	269	255	243	233	224	216	209	202
3	845	598	488	423	378	345	319	299	282	267	255	244	234	226	218	211
3,5	878	621	507	439	393	359	332	311	293	278	265	254	244	235	227	220
4	908	642	524	454	406	371	343	321	303	287	274	262	252	243	235	227
4,5	935	661	540	468	418	382	354	331	312	296	282	270	259	250	242	234
5	960	679	554	480	429	392	363	340	320	304	290	277	266	257	248	240
5,5	983	695	568	492	440	402	372	348	328	311	297	284	273	263	254	246
6	1005	711	580	503	450	410	380	355	335	318	303	290	279	269	260	251
6,5	1025	725	592	513	459	419	388	363	342	324	309	296	284	274	265	256
7	1045	739	603	522	467	426	395	369	348	330	315	302	290	279	270	261

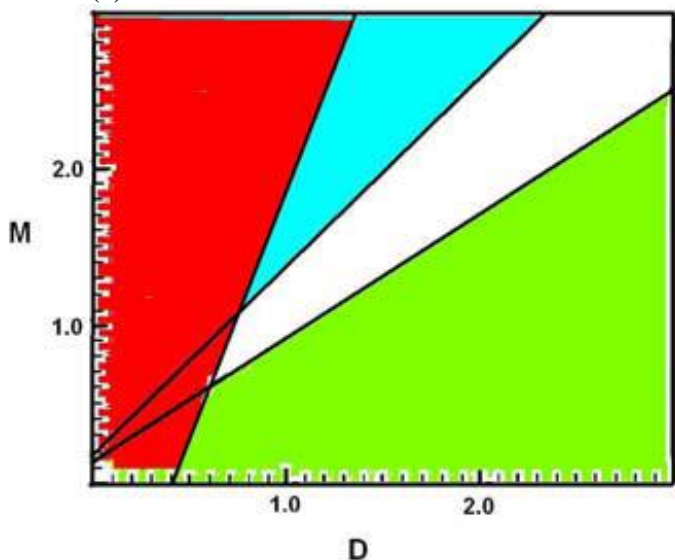
## 1.6 (a)



(b)



(c)



A be nem színezett (fehér) terület mutatja a lakhatósági zóna tartományát.

(d) Lehel:

$$M - 0,8D = 1 - 0,8 \cdot 2 = -0,6 \leq 0,12$$

A víz megfagy, nincs a lakhatósági zónában.

Hádész:

$$M - 1,2D = 2 - 1,2 \cdot 0,5 = 1,4 \geq 0,18$$

A víz felforr, nincs a lakhatósági zónában. (ráadásul

$$M - 3,3D = 2 - 3,3 \cdot 0,5 = 0,35 \geq -1,3, \text{ így a keringése is kötött.})$$

Óceánia:

$$M - 0,8D = 2 - 0,8 \cdot 2 = 0,4 \leq 0,12,$$

$$M - 1,2D = 2 - 1,2 \cdot 2 = -0,4 \leq 0,18$$

$$M - 3,3D = 2 - 3,3 \cdot 2 = -4,6 \leq -1,3$$

egyik egyenlőtlenség sem teljesül.

Óceánia a csillagának lakhatósági zónájába tartozik. Elég távol kering tőle ahhoz, hogy ne egyezzen meg a forgási és keringési periódusa, így a bolygón nappalok és éjszakák váltják egymást. A felszíni hőmérséklete is megfelelő a folyékony víz tartós létezéséhez.

**1.7 (a)** A víz forráspontja (földihez hasonló körülmények között) 373 K:

$$373K = 0,6 \cdot 5770 \cdot \sqrt{\frac{700000}{d_{\text{belső}}}}$$

$$d_{\text{belső}} = 6,0 \cdot 10^7 = 60 \text{ millió km}$$

A jég olvadáspontja (földihez hasonló körülmények között) 273 K:

$$273K = 0,6 \cdot 5770 \cdot \sqrt{\frac{700000}{d_{\text{külső}}}}$$

$$d_{\text{külső}} = 1,1 \cdot 10^8 = 110 \text{ millió km}$$

A csillagtól mérve a legalább 60 millió km és legfeljebb 110 millió km távolságban keringő bolygókon létezhet folyékony halmazállapotban víz.

(b) Nem. A képlet alapjául szolgáló modell nem veszi figyelembe a légkör hatását.

$$(c) \quad T = 0,6 \cdot 7200 \cdot \sqrt{\frac{70 \cdot 700000}{d}}$$

$$373K = 0,6 \cdot 7000 \cdot \sqrt{\frac{70 \cdot 700000}{d_{\text{belső}}}}$$

$$d_{\text{belső}} = 6,2 \cdot 10^9 \text{ km} = 41 \text{ CSE}$$

Ez körülbelül a Pluto közepes távolsága a Naptól.

$$273K = 0,6 \cdot 7200 \cdot \sqrt{\frac{30 \cdot 700000}{d_{\text{külső}}}}$$

$$d_{\text{külső}} = 1,2 \cdot 10^{10} \text{ km} = 77 \text{ CSE}$$

Több, mint a Neptunusz pályasugarának (30 CSE) kétszerese. Ezen adatok alapján a Canopus lakhatósági zónája a Naprendszerben az összes bolygó pályáján kívül helyezkedne el.

$$\mathbf{1.8} \quad c = 0,2a = 0,8 \text{ CSE}$$

$$a - c = 3,2 > 3 \text{ CSE},$$

a lakhatósági zóna belső határán belül tehát sosem tartózkodik a bolygó.

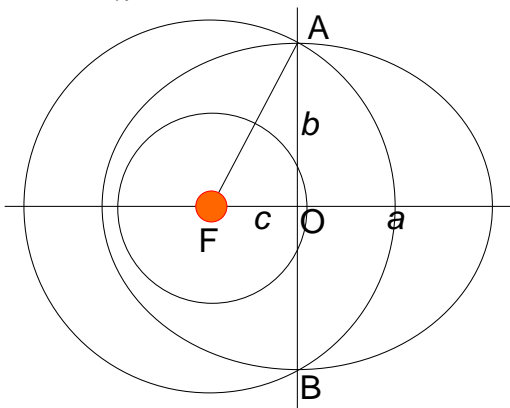
A lakhatósági zóna külső határának távolsága megegyezik a fél nagytengellyel, ezért a lakhatósági zóna külső határát a bolygó a kistengely végpontjaiban lépi át.

A bolygó területi sebessége állandó, ezért azt kell kiszámítani, hogy az FA és FB sugarak által határolt kisebbik cikk hányad része az ellipszis területének.

A cikk területe a fél ellipszis mínusz az OFA háromszög kétszerese:

$$\frac{\frac{ab\pi}{2} - bc}{ab\pi} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{c}{a}}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{c}{a\pi} = \frac{1}{2} - \frac{e}{\pi} =$$

$$= 0,5 - \frac{0,2}{\pi} = 0,44 = 44\%$$



$$\mathbf{1.9} \quad (c) \quad M = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma T^2} =$$

$$= \frac{4\pi^2 (5 \cdot 10^9)^3}{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot (1,7 \cdot 24 \cdot 3600)^2} =$$

$$= 3,4 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Körülbelül másfélszeres naptömegű, vagyis a Naphoz hasonló csillag.

Az exobolygó jóval a Merkúr pályáján belül kering.

$$(b) \quad m_{\text{légkör}} = 0,5 \cdot 3 \cdot 1,9 \cdot 10^{27} = 2,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

$$1 \text{ év} \approx 3,1 \cdot 10^7 \text{ s.}$$

Egy év alatt  $5 \cdot 10^9 \cdot 3,1 \cdot 10^7 = 1,6 \cdot 10^{17} \text{ kg}$  tömegű anyag távozik a bolygóról, így az egész légkörét

$$t = \frac{2,9 \cdot 10^{27}}{1,6 \cdot 10^{17}} = 1,8 \cdot 10^{10} \text{ év},$$

vagyis 18 milliárd év alatt veszítené el.

Megjegyzés:

Az exobolygó anyagvesztésének mértéke hatalmasnak tűnik, de a kapott 18 milliárd év több, mint az Univerzum életkora. Kevés kivétellel a bolygók képesek túlélni a csillagukat (kb. 10–20 milliárd élettartam) még ilyen nagymértékű anyagvesztés ellenére is.

**1.10** Kepler harmadik törvénye írja le a kapcsolatot az egy ( $M_{\text{cs}}$  tömegű) csillag körül keringő ( $m_b$  tömegű) (exo)bolygó keringési ideje ( $T$ ) és pályájának fél nagytengelye ( $a$ ) között:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma(M_{\text{cs}} + m_b)}{4\pi^2},$$

Ha két exobolygó tömege  $m_1$  és  $m_2$ , a keringési idők négyzetének a hányadosa

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{(M_{\text{cs}} + m_2)a_1^3}{(M_{\text{cs}} + m_1)a_2^3}$$

A tömegeket célszerű ugyanahhoz az égitesthez, például a Jupiterhez viszonyítani (bár konkrét értékeiket is ki lehetne számolni, hiszen megadták a Jupiter tömegét, de ez a feladat szempontjából felesleges). A Nap tömege 1047-szerese a Jupiter  $m_J$  tömegének, míg a Jupiter tömege 318-szorosa a Föld  $m_F$  tömegének.

A GJ 876 csillag tömege így

$$M_{\text{GJ876}} = (0,33 \pm 0,03) \cdot M_{\text{Nap}} =$$

$$= (345,5 \pm 31) \cdot m_J$$

A GJ 876d (továbbiakban egyszerűen  $d$ ) jelű exobolygó tömege

$$m_d = 6,8m_F = 0,0214m_J,$$

az  $e$  jelű exobolygó tömege pedig

$$m_e = 15m_F = 0,047m_J,$$

Az exobolygó és a csillag tömegének összegét jó közelítéssel helyettesíthetjük a csillag tömegével, majd képletünk a középiskolások által ismert alakra egyszerűsödik:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

A GJ 876 csillag ismert exobolygói a következő sorrendben követik egymást a csillagtól távolodva:  $d$ ,  $c$ ,  $b$  és  $e$ . Ezt a sorrendet az exobolygópályák fél nagytengelyeinek értékéből lehet megállapítani. (A csillag neve utáni kisbetűket felfedezésük sorrendjében kapják az exobolygók, a  $b$  betűtől kezdve.)

A  $c$  és a  $d$  exobolygók keringési idejének hányadosa

$$\frac{T_c}{T_d} = \sqrt{\frac{a_c^3}{a_d^3}} \approx 31,68,$$

amely nem írható fel kis egész számok hányadosaként.

Ha a  $b$  vagy az  $e$  exobolygó keringési idejét viszonyítjuk a  $d$  keringési idejéhez, akkor még nagyobb számot kapunk, tehát ezeket a hányadosokat nem érdemes kiszámolni.

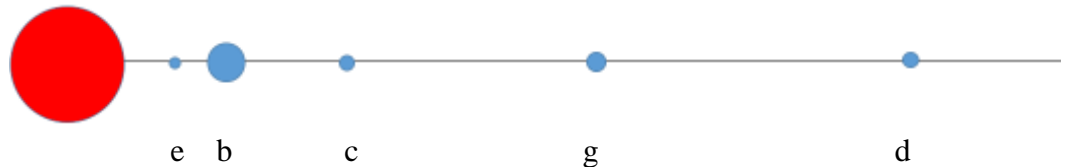
A fentihez hasonlóan  $b$  és  $c$  keringési idejének aránya

$$\frac{T_b}{T_c} = \sqrt{\frac{a_b^3}{a_c^3}} \approx 2,04,$$

amely közelítőleg a 2:1-es rezonanciának felel meg.

Meg kell még vizsgálnunk az  $e$  és  $b$  exobolygók keringési idejének arányát is:

$$\frac{T_e}{T_b} = \sqrt{\frac{a_e^3}{a_b^3}} \approx 2,03,$$



amely az előzőhöz hasonlóan szintén 2:1-es rezonanciának felel meg.

E két rezonanciából következik, hogy az  $e$  és  $c$  exobolygók 4:1-es rezonanciában vannak.

Tehát a GJ 876 csillag bolygórendszerében három bolygó áll egymással rezonanciában ( $T_c:T_b:T_e = 1:2:4$ ). Ellenőrzésképpen a mért (exobolygó-katalógusban megadott) keringési periódusok: 30,23 nap, 61,03 nap és 124,69 nap, amelyek jól egyeznek eredményünkkel.

Ilyen rezonancia Naprendszerünkben is megtalálható, igaz nem bolygók között, hanem a Jupiter három belső Galilei holdja között ( $T_{Io}:T_{Europa}:T_{Ganymedes} = 1:2:4$ , a keringési idejük rendre: 1,77 nap, 3,55 nap és 7,16 nap).

**1.11** (a) A következő táblázat az ábrázolandó adatokat tartalmazza:

Bolygó	Távolság (cm)	Átmérő (mm)
Gliese-581b	4	10
Gliese-581c	7	4
Gliese-581d	22	5
Gliese-581e	3	3
Gliese-581f	76	5
Gliese-581g	15	4

A kért ábrázolási mód mellett a Gliese-581f kevés lapra férne ki, így vagy nem ábrázoljuk, vagy esetleg másik méretarányt választunk a rendelkezésre álló papírméret szerint.

A következő ábra méretarányosan mutatja a Gliese-581 bolygórendszert az  $f$  jelű bolygó kivételével. A bal oldalon, az egyenes elején helyezkedik el a csillag.

(b)

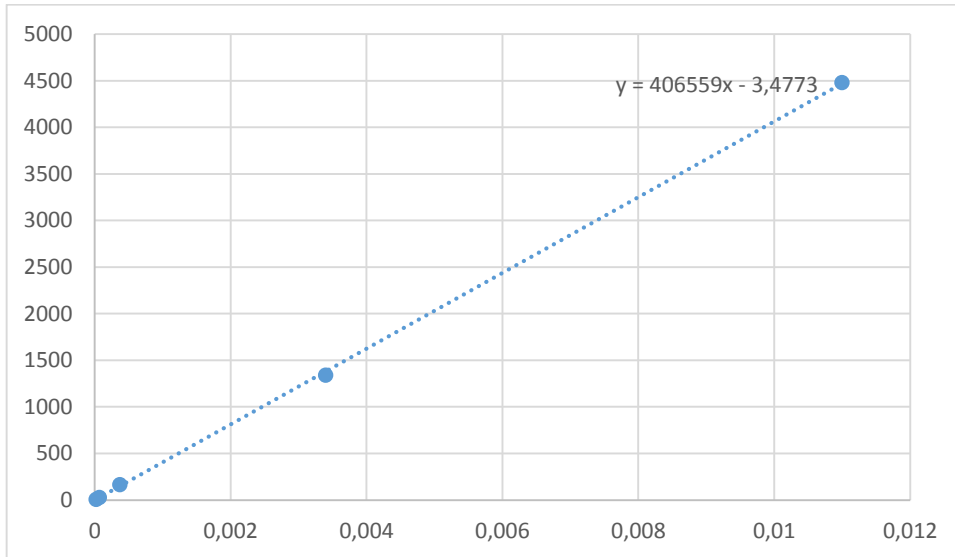
$r^3$ (CSE <sup>3</sup> )	$T^2$ (nap <sup>2</sup> )
0,000069	28,8
0,00037	166
0,011	4480
0,000022	9,692
0,44	187000
0,0034	1340

Az f bolygó kivételével ábrázolva az adatokat, az egyenes meredeksége

$$4,07 \cdot 10^5 \text{ nap}^2/\text{CSE}^3 = 9,00 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3.$$

Kepler III. törvénye alapján ez  $\frac{4\pi^2}{\gamma M}$ ,

ahonnan  $M = 6,6 \cdot 10^{29} \text{ kg}$ .



**1.12** (a) A Kepler-10b sugara:

$$R_K = 1,4 \cdot 6,37 \cdot 10^6 = 8,9 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 =$$

$$= \frac{4}{3} \pi \cdot (8,9 \cdot 10^6)^3 = 3,0 \cdot 10^{21} \text{ m}^3$$

$$M = \rho \cdot V =$$

$$= 8,8 \cdot 10^3 \cdot 3,0 \cdot 10^{21} = 2,6 \cdot 10^{25} \text{ kg}$$

(b) A felszínén a gravitációs gyorsulás:

$$g = \frac{\gamma M}{R^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,6 \cdot 10^{25}}{(8,9 \cdot 10^6)^2} = 22 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

a földinek több, mint kétszerese.

(c) A Földön:  $mg = 60 \cdot 9,8 = 588 \text{ N}$

A Kepler-10b exobolygón:

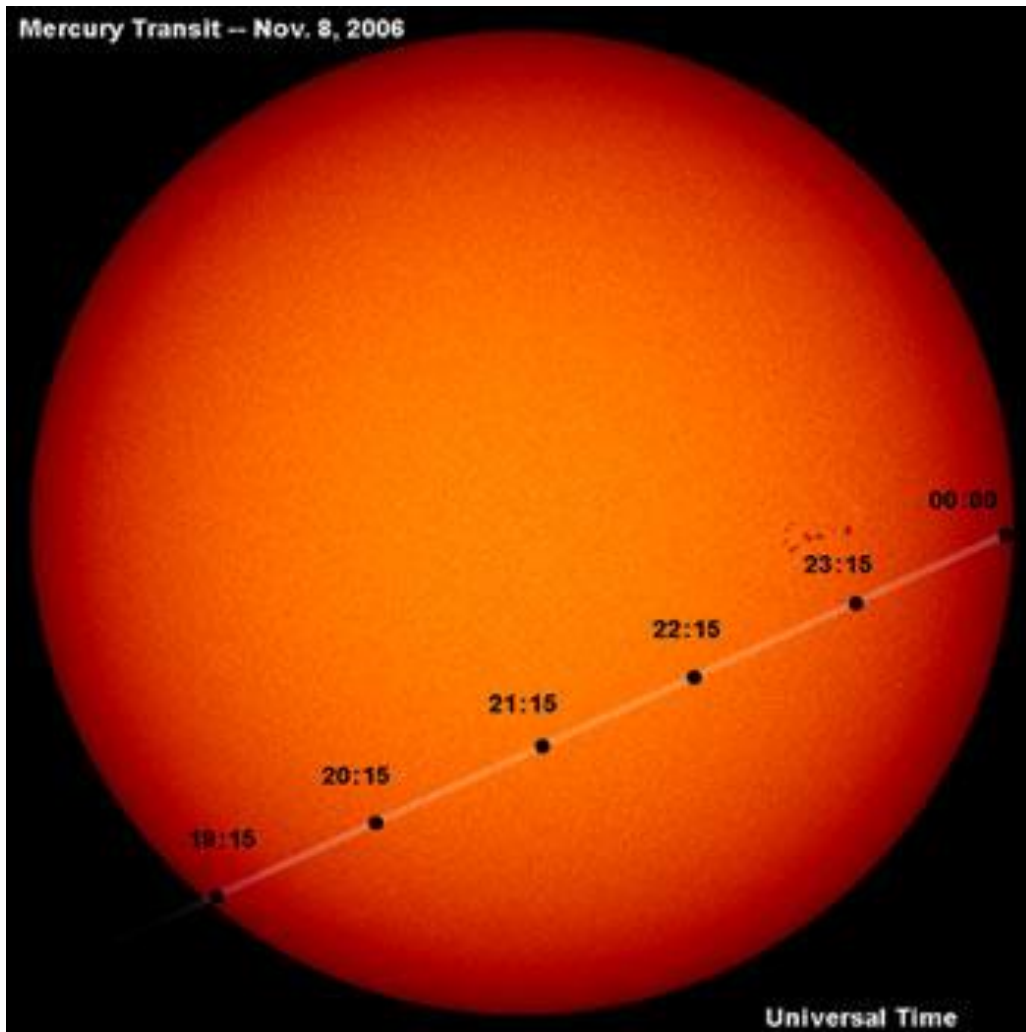
$$mg = 60 \cdot 22 = 1300 \text{ N}$$

## 2. Exobolygó-keresési módszerek

### TRANZITMÓDSZER

**2.1** A képen a Merkúr 2006. november 8-i átvonulása látható a Nap előtt. Megfigyelhető, hogy a Merkúr fekete korongja csökkenti a Nap fényes területét. Ez azt jelenti, hogy a Földről nézve a Merkúr tranzitja alatt a Nap kissé elhalványul.

(a) A Nap sugara 696000 km, a Merkúr 2440 km. Milyen arányban csökken a napkorong fényes területe a Merkúr átvonulásakor, ha eltekintünk attól, hogy a Merkúr közelebb van hozzánk, mint a Nap?



A Merkúr 2006. novemberi átvonulása (NASA)

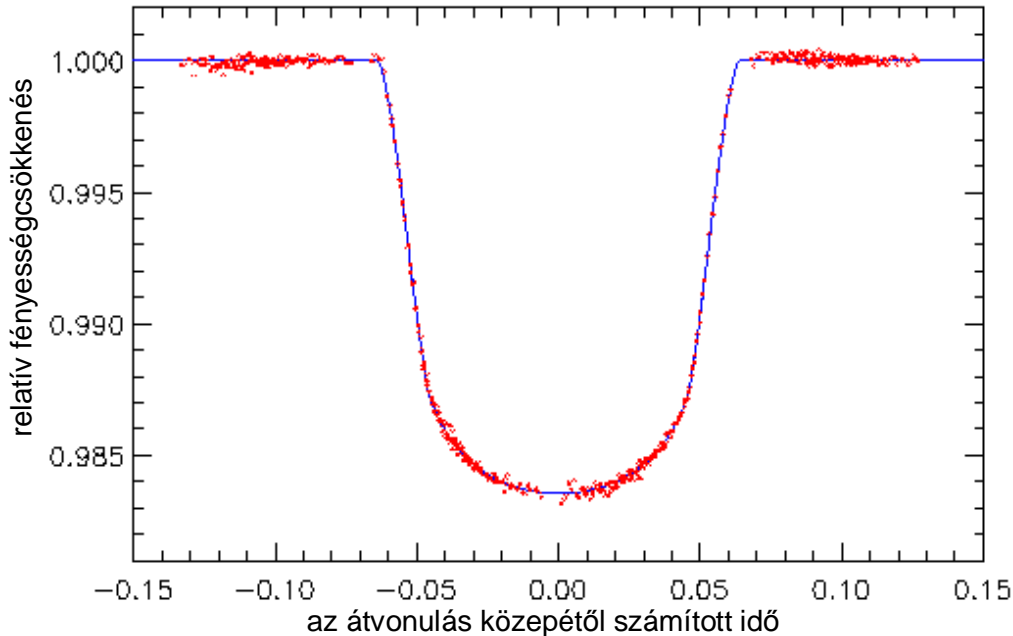
(b) Hogyan változik a fenti eredmény, ha a távolságkülönbséget is figyelembe vesszük? Számoljunk 0,4 CSE közepes Merkúr-Nap távolsággal.

(c) Egy távoli csillagász a Naprendszer tanulmányozza. A nagy távolság miatt műszereivel már nem látja a Nap korongját, de amikor egy bolygója elhalad előtte, a fényessége ebben az esetben is csökken. Milyen arányban csökken a Nap korongjának fénylő területe, ha a Föld, illetve ha a Jupiter korongja van előtte?

**2.2** A NASA 2009-ben fellőtt Kepler-űrtávcsövével több évig figyeltek körülbelül 150 000 csillagot. A Kepler-űrtávcső nagy pontossággal mérte a csillagok fényességét, hogy felfedezze az esetlegesen előttük elvonuló exobolygók okozta kismértékű fényességcsökkenést.

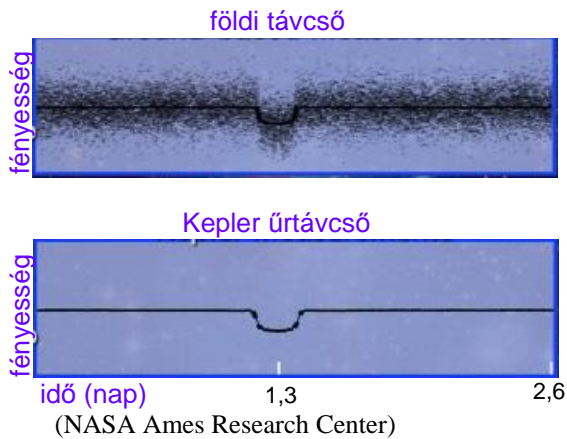
A grafikon egy nagy, Jupiterhez hasonló exobolygó tranzitját ábrázoló úgynevezett fénygörbe. Független tengelye a csillag relatív fényességcsökkenését mutatja, a vízszintes tengely pedig az átvonulás alatt eltelt időt.

Hány óra alatt vonul át teljesen a bolygó a csillag előtt?



Megjegyzés:

Miért szükséges űrtávcsövekkel mérni a csillagok fényességét? A következő ábra a HAT-P-7 csillag fénygörbéje egy földi távcső adataiból (fenti görbe) és a Kepler-űrtávcső mérései alapján (alsó görbe). A földi adatok pontatlanságát elsősorban légköri zavaró hatások okozzák.



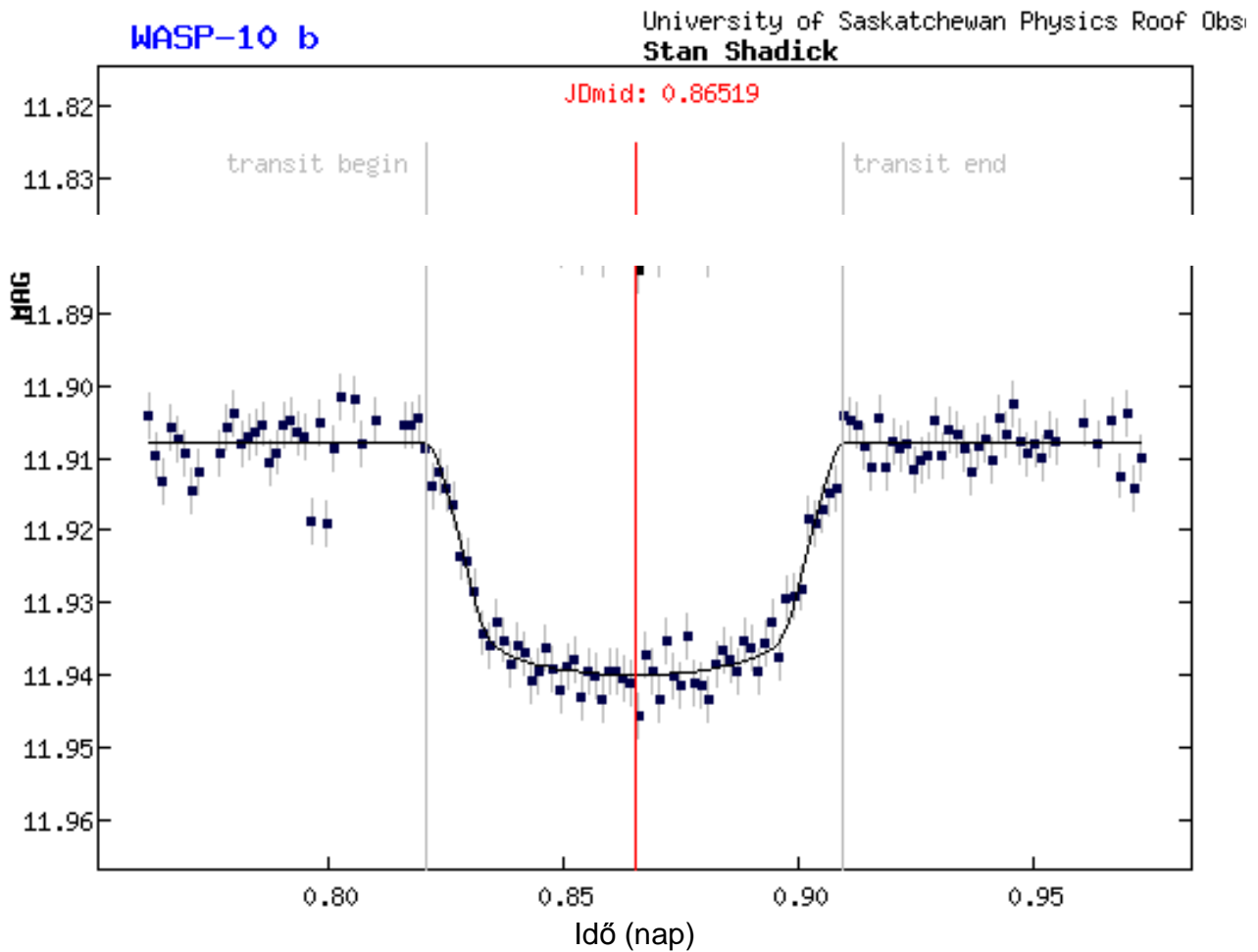
A HATNet, azaz Hungarian Automated Telescope Network (Magyar Automatikus Távcsőhálózat) nevű, kis, 11 cm átmérőjű csillagászati távcsövekből álló hálózat a fentivel együtt közel száz exobolygórendszert fedezett fel. Létrehozója Bakos Gáspár, számos magyar csillagász dolgozik a programban.

**2.3** A Pegazus csillagképben található, a bolygókeresők által WASP-10 névvel illetett (szabad szemmel nem látható) csillag tömege a Nap tömegének 0,8-szerese. Szerencsére a bolygó keringési síkja nem zár be nagy szöget a látóirányunkkal, így átvonulásoknak lehetünk tanúi.

A következő ábra a csillag fénygörbéje: a csillag  $m$  látszó fényességét mutatja az idő függvényében. Az  $m$  érték annál nagyobb, minél halványabb a csillag. Amennyivel  $m$  értéke megnő, 0,3981-nek annyiadik hatványa szerint csökken a csillag fényének intenzitása.

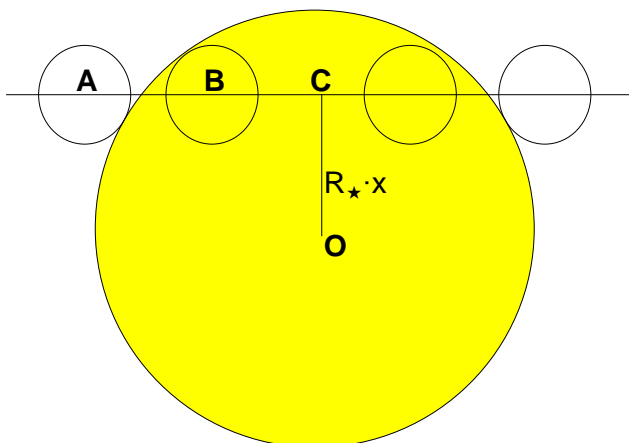
(a) Hány százalékkal csökken a WASP-10 intenzitása az exobolygó átvonulása alatt?

- (b) A megadott fénygörbéből határozd meg a bolygó  $R$  sugarának és a csillag  $R_*$  sugarának hányadosát.
- (c) Olvasd le az ábráról, hogy egy átvonulás idejének hányad részében tartózkodik a bolygó teljes egészében a csillag előtt.



<http://var2.astro.cz/ETD/>

- (d) Az időtartamok, illetve a sugarak hányadosából határozd meg, hogy a csillag sugarával kifejezve “milyen messzire” halad el a bolygó a csillag középpontja mellett. Vagyis: mennyi az ábrán  $x$  értéke?



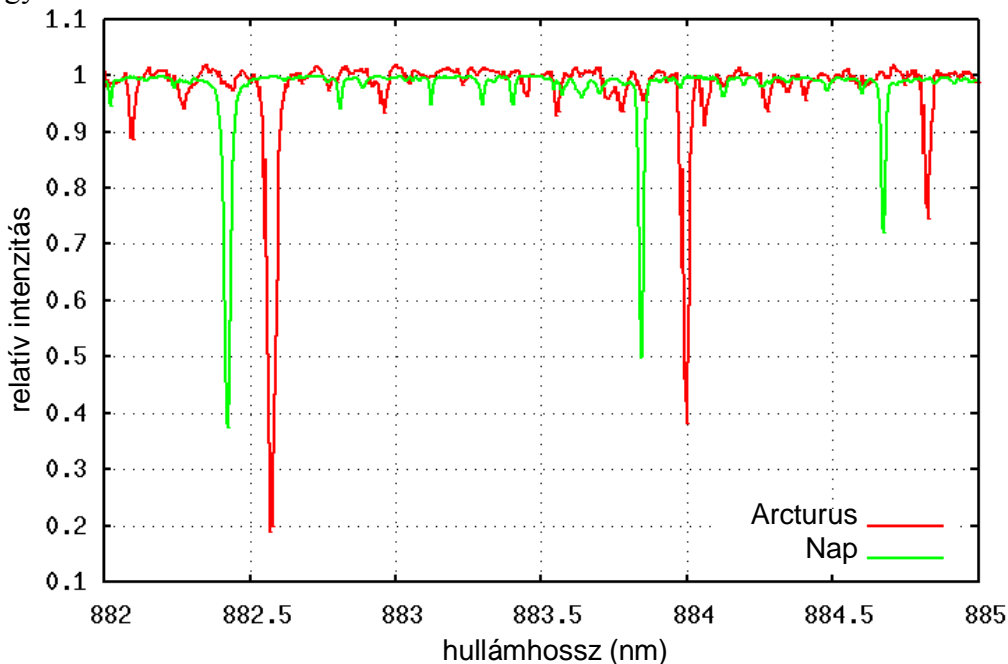
## 2. Exobolygó-keresési módszerek

### DOPPLER-MÓDSZER

**2.4** Ha a  $\lambda$  hullámhosszú fényt kibocsátó forrás és az azt detektáló műszer távolsága változik, akkor a műszer által mért hullámhossz  $\Delta\lambda$  eltolódást mutat a műszerhez képest nyugvó forrás esetén mérthez viszonyítva. A relatív hullámhosszváltozás megegyezik a távolodás vagy közeledés  $v$  sebességének és a  $c$  fénysebességnek a hányadosával (Amennyiben  $v$  sokkal kisebb, mint  $c$ ):

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

Az ábrán az Arcturus közeli infravörös spektrumának kicsiny részlete látható, amely a Nap spektrumához igen hasonló jellemzőket mutat. Mennyi az Arcturus látóirányú sebessége? Közeledik vagy távolodik?



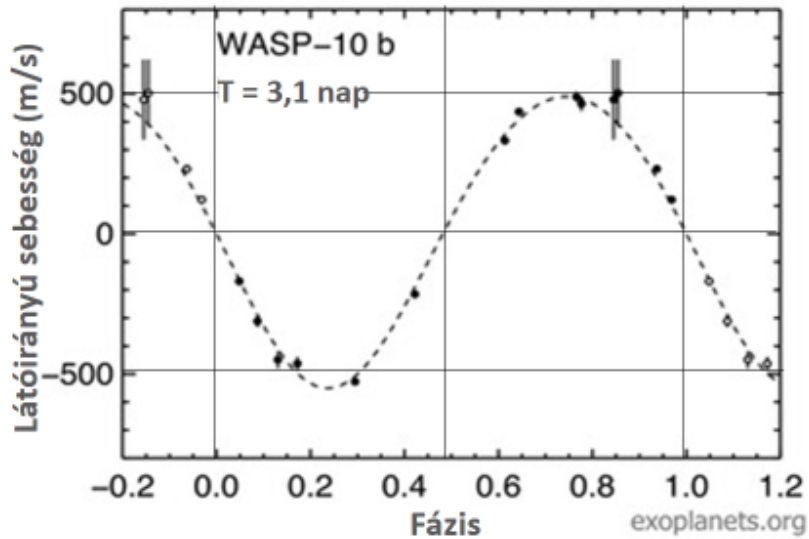
<http://cas.sdss.org/dr7/en/proj/advanced/spectraltypes/>

**2.5** Nagyságrendi becslés:

- Mekkora sugarú pályán kering a Nap a Nap-Jupiter rendszer tömegközéppontja körül?
- Mekkora a keringés sebessége?
- Egy idegen csillagász 10 pc távolságból a Napot figyeli. Szuperérzékeny spektrográfiával egymilliomodnyi  $\Delta\lambda/\lambda$  Doppler-eltolódást már ki tud mutatni. Fel tudja-e fedezni műszerével a Jupitert?
- Hogyan (milyen irányban) kellene változnia a Jupiter tömegének és/vagy pályasugarának, hogy a távoli csillagásznak legyen esélye felfedezni?

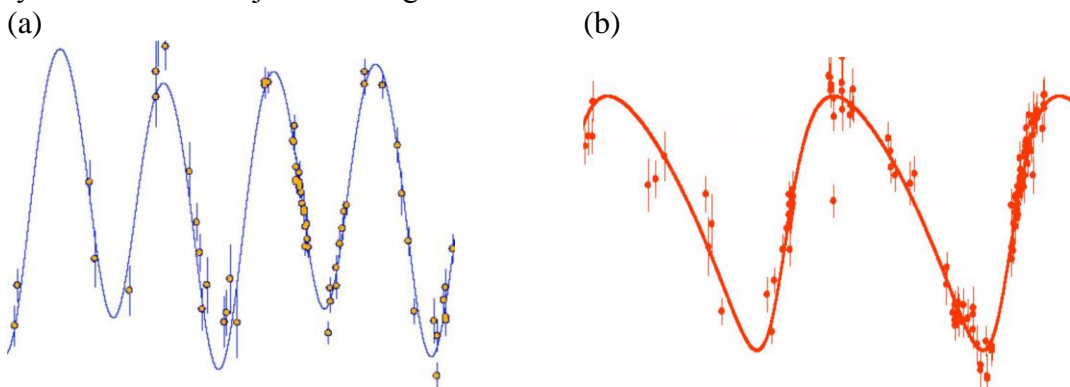
**2.6** A Naprendszeren kívül megtalált bolygók közül számosat Doppler-módszerrel fedeztek fel: A bolygó gravitációs vonzása változásokat okoz a csillag sebességében. Ha a mozgásnak van radiális (látóirányú) komponense, akkor a csillag spektrumvonalai eltolódnak a referenciaként használt nyugvó gáz spektrumvonalaihoz képest.

A Pegazus csillagképben található, WASP-10 nevű (szabad szemmel nem látható) csillag tömege a Nap tömegének 0,8-szerese. Az alábbi ábra a csillagnak a WASP-10b nevű bolygója hatására bekövetkező sebességváltozását mutatja. Az ábra szerint a sebességingadozás periódusideje 3,1 nap (ez felel meg a vízszintes tengelyen az 1,0 értéknek).



- (a) A Kepler-törvényből becsüld meg a pálya sugarát. Hasonlítsd össze a Nap-Föld távolsággal.
- (b) Az ábráról olvasd le a sebességingadozás amplitúdóját. Milyen arányú volt a csillag szinképeének maximális Doppler-eltolódása, amelyből ezt az adatot kapták? (És még ennél kisebbeket is tudnak mérni!)
- (c) A sebességamplitúdóból adj alsó becslést a bolygó tömegére és hasonlítsd össze a Jupiter tömegével. Miért csak alsó becslés ez az eredmény?

**2.7** A grafikonok egy-egy távoli csillag látóirányú sebességének mért változását mutatják az idő függvényében. Mi okozhatja a szinuszgörbétől való eltérést?



**2.8** Az alábbi táblázat a Pegazus csillagképben látható 51 Pegasi nevű csillag sebességének mért értékeit mutatja a napban számított eltelt idő függvényében. (A sebességértékek pontatlansága mindössze  $\pm 5$  m/s körül van.)

Megjegyzés:

Az 51 Pegasi b volt az elsőként felfedezett olyan exobolygó, amely a Naphoz hasonló csillag körül kering.

<b>Idő (nap)</b>	<b>Sebesség (m/s)</b>
0,62	56
0,71	67
2,60	-35
3,64	-33,5
3,82	-23
6,65	-23
7,61	-44
7,66	-34
8,61	25
8,75	41
9,60	61
10,66	-2,5
10,71	1
10,75	-5
11,69	-39
12,61	3

(Adatok: Marcy, G. W., Butler, R. P., Williams, E., Bildsten, L., Graham, J. R., Ghez, A. M., & Jernigan, J. G. 1997, *Astrophysical Journal*, 481, 926)

- (a) Ábrázold a csillag sebességét az idő függvényében, és határozd meg a bolygó keringési periódusát.
- (b) Mekkora a pálya fél nagytengelye, ha feltételezzük, hogy az 51 Pegasi tömege egyenlő a Nap tömegével?
- (c) Adj becslést a bolygó tömegére. Hasonlítsd össze a Föld, illetve a Jupiter tömegével.

## 2. Exobolygó-keresési módszerek

### ASZTROMETRIAI MÓDSZER

**2.9** Valahol a Galaxisban egy csillagász bolygók után kutatva a Napot figyeli. Legfeljebb mekkora távolságra lakó csillagásznak lehet esélye arra, hogy a Nap imbolygása alapján következtessen a Jupiter jelenlétére, ha a legkisebb imbolygás, amelyet műszereivel ki tud mutatni,  $10^{-4}$  ívmásodperc nagyságrendű? (A többi bolygó hatását hanyagoljuk el, hiszen a Naprendszerben a Napon kívüli tömeg túlnyomó része a Jupiterben koncentrálódik. Azt is feltételezhetjük, hogy a pályája kör.)

### 2.10 (Diákolimpiai szakköri feladat nyomán)

A csillagok imbolygásának a kimutatására eddig még nem volt meg a megfelelő mérési pontosság, így egyelőre kevés asztrometriai módszerrel felfedezett exobolygót ismerünk.

A Gaia asztrometriai műholdat 2013 decemberében bocsátotta fel az Európai Űrügynökség (ESA). Az űrtávcső a Föld pályáján kering a Nap körül, célja a Tejútrendszerbeli csillagok különböző adatainak pontos megmérése. A Gaia misszió keretében az elkövetkező években akár százezer exobolygó-felfedezést is várnak. Ráadásul olyan, körülbelül 1600 fényév távolságon belüli exobolygókat (hosszú periódusú gázóriásokat) fognak felfedezni ezzel a módszerrel, amelyeket más módszerekkel várhatóan nem lehetne megtalálni.

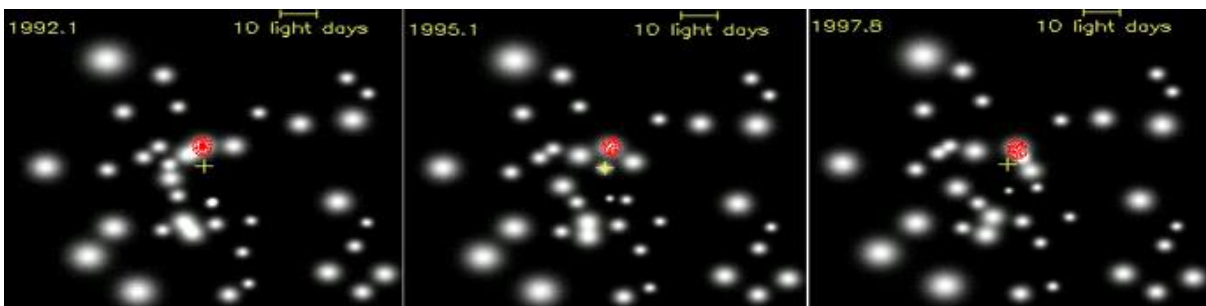
(a) Az űrtávcső képes érzékelni a csillagok irányában fellépő  $2 \cdot 10^{-5}$  ívmásodpercnyi változást. Ha egy 1000 fényév távolságra levő csillag irányában ekkora változás figyelhető meg, mekkora sugarú pályán kering a csillag a csillagból és a bolygójából álló rendszer tömegközéppontja körül?

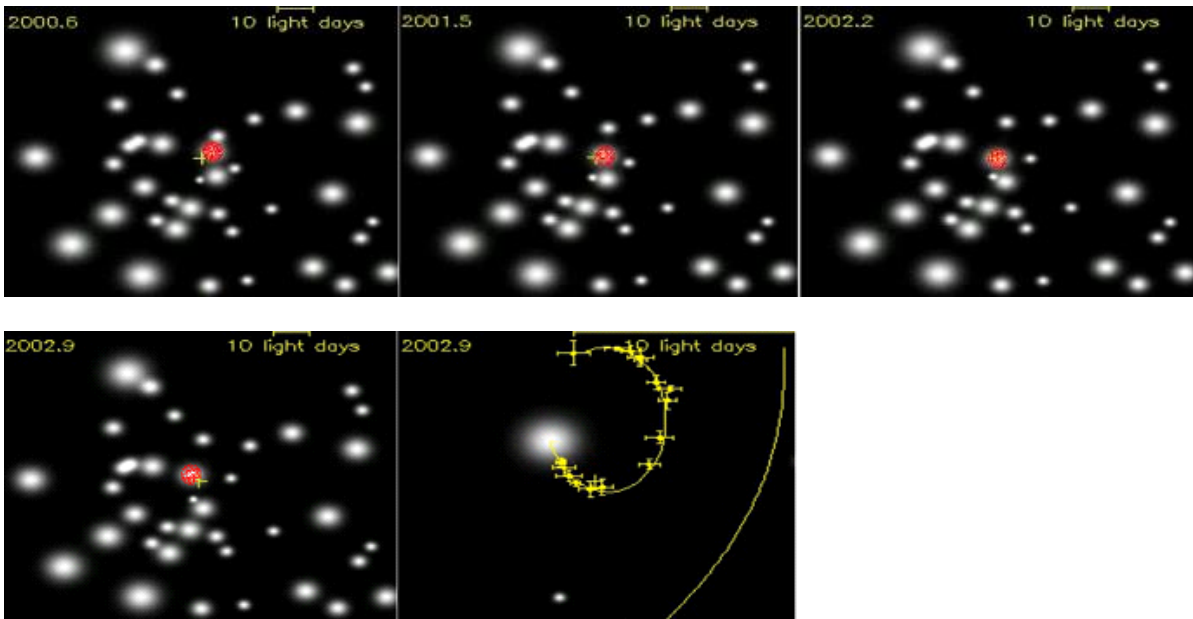
(b) A Gaia főtükörének mérete  $1,5 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$ . A tükörrre beeső fényt az  $0,5 \text{ m} \times 1 \text{ m}$  méretű, 1 gigapixeles detektorra gyűjti össze. Adj becslést az egy másodperc alatt a csillagból a detektorra érkező fotonok számára.

**2.11** Az exobolygók felfedezésére is egyre inkább alkalmazható asztrometriai módszert könnyebben tanulmányozhatjuk, amikor nem a kisebb, hanem a nagyobb tömegű partner jelenlétére következtetünk a csillag sajátmozgásából.

Az alábbi képsorozat első hét felvétele az égboltnak ugyanazt a tartományát (kis kereszt jelzi a közepét) ábrázolja több időpontban az 1992-től 2002-ig eltelt tíz év során. A pirossal megjelölt csillag láthatóan változtatja a helyét. A csillag távolsága alapján a helyváltoztatás mértéke körülbelül 10 fénynap. A nyolcadik felvétel kinagyítva mutatja a csillagnak a tíz év során meghatározott pozícióit (a becsült mérési hibával együtt). A pontok láthatóan ellipszist formáznak, a csillag kering valami körül, ami a képeken nem mutatkozik.

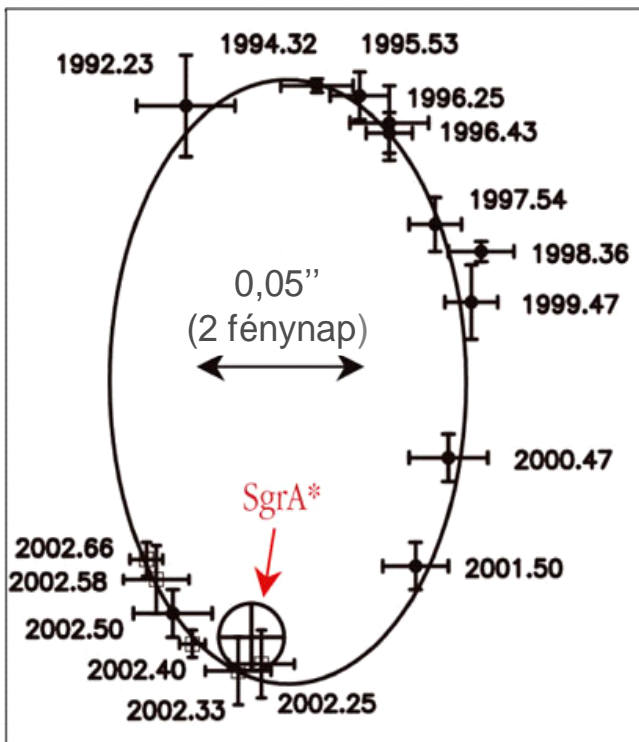
(a) Mekkora az elmozdulás a Naprendszer méreteihez képest: hasonlítsd össze a csillag elmozdulását a Neptunusz pályájának átmérőjével.





<http://astronomie-smartsmur.over-blog.com>

(b) Az ellipszispálya síkja természetesen nem feltétlenül merőleges a látóirányunkra, így a perspektíva miatt a nagytengely iránya nem feltétlenül az, amit mi az ellipszis legnagyobb kiterjedésének látunk. Kepler területi törvénye alapján azonban megállapítható, hogy hol van az a vonzócentrum, amely körül a csillag kering. Ez az objektum a Nyilas csillagkép latin nevééről a Sagittarius A\* (Sgr A\*) nevet kapta, az alábbi ábrán kereszt jelzi a helyét. A nagytengely hosszát 10 fénynapnak tekintve az ábra alapján adj becslést a Sagittarius A\* tömegére.



<http://astronomie-smartsmur.over-blog.com>

(c) Az ábra alapján adj felső becslést a Sagittarius A\* sugarára.

## Megoldás 2.

**2.1** (a) A sötétedés mértéke

$$\frac{R_M^2}{R_S^2} = \frac{2440^2}{696000^2} = 1,2 \cdot 10^{-5} = 0,0012\%$$

(b) Ha a három égitest egy vonalban van, a Merkúr távolsága 0,6-szerese a Nap távolságának.

A Nap távolságában a Merkúr  $\frac{1}{0,6^2} \approx 3$ -szor

nagyobb területet takar ki, így a sötétedés mértéke a számított eredménynek kb. háromszorosa.

Megjegyzés:

Ha a Merkúr korongját a Holddal helyettesítjük, a Hold korongja teljesen elfedi a Napot, teljes napfogyatkozást okozva. A másik véglet, amikor a csillag és bolygója olyan messze vannak a megfigyelőtől, hogy a távolságkülönbség valóban elhanyagolható: ez a helyzet, amikor exobolygók tranzitját figyeljük meg a csillaguk előtt.

(c) Föld:

$$\frac{R_F^2}{R_S^2} = \frac{6370^2}{696000^2} = 8,4 \cdot 10^{-5} = 0,0084\%$$

$$\text{Jupiter: } \frac{R_J^2}{R_S^2} = \frac{71500^2}{696000^2} = 0,105 = 1,1\%$$

**2.2** Kb. 0,12 óra.

**2.3** (a) A fényesség változása az ábráról leolvasva kb.  $\Delta m = 11,941 - 11,912 = 0,039$ .

A relatív fényességcsökkenés

$$1 - 0,3981^{0,039} = 1 - 0,965 = 3,5\%.$$

(b) A kitakart terület arányával kifejezve

$$\frac{R_*^2 - R^2}{R_*^2} = 1 - \left(\frac{R}{R_*}\right)^2 = 0,965.$$

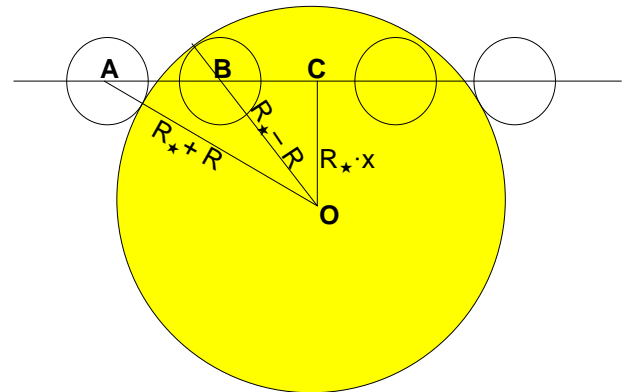
$$\text{Ebből } \frac{R}{R_*} = 0,19.$$

(c) A lapos rész  $t_2$  időtartamát kell elosztani a mélyedés teljes  $t_1$  idejével. Ezt megtehetjük úgy is, hogy vonalzóval lemérjük őket az ábrán. Durva mérés, mert nehéz eldönteni, hogy hol törik a görbe.

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{55}{88} \approx 0,63.$$

(d) Az ábra alapján a  $t_1$  illetve  $t_2$  idő alatt megtett utak 2AC illetve 2BC, ezek négyzeteit a

Pitagorasz-tételből kifejezve és egymással elosztva:



$$\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 = \frac{(R_* - R)^2 - R_*^2 x^2}{(R_* + R)^2 - R_*^2 x^2} =$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{R}{R_*}\right)^2 - x^2}{\left(1 + \frac{R}{R_*}\right)^2 - x^2}$$

$$0,63^2 = \frac{(1 - 0,19)^2 - x^2}{(1 + 0,19)^2 - x^2}$$

$$0,562 - 0,63x^2 = 0,656 - x^2$$

$$x = 0,48 \approx 0,5$$

**2.4** A Nap távolsága nem változik. Ha a grafikon vízszintes tengelyén az osztásrészek távolsága 2,5 cm, akkor a spektrumvonalak eltolódása 0,8 cm, ami a skálán  $\Delta\lambda = +0,16$  nm-nek felel meg.

(A három vonal eltolódása között nem észlelhető különbség, ezért számoljunk a középsővel.)

A sebesség

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot c = \frac{0,16}{883,84} \cdot 3,0 \cdot 10^8 = 54 \text{ km/s}$$

Az Arcturus spektrumában nagyobb a hullámhossz, tehát távolodik.

**2.5** (a) A Nap és a Jupiter tömegaránya

$$\frac{2,0 \cdot 10^{30}}{1,9 \cdot 10^{27}} \approx 1000,$$

a tömegközéppont tehát kb. a Jupiter pályasugarának ezredrészére van a Nap középpontjától.

A keresett sugár tehát

$$0,001r = 0,001 \cdot 7,8 \cdot 10^{11} \text{ m} \approx 8 \cdot 10^8 \text{ m}.$$

(b) A Jupiter keringési periódusa kb. 12 év

$$v = \frac{2r\pi}{T} = \frac{2\pi \cdot 8 \cdot 10^8}{1,9 \cdot 10^8} = 13 \text{ m/s}$$

(c) A Jupiter miatti Doppler-eltolódás csak

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} = \frac{13}{3 \cdot 10^8} \approx 4 \cdot 10^{-8} \ll 1 \cdot 10^{-6},$$

nem tudja kimutatni.

**2.6** (a) A sebességingadozás periódusa a bolygó keringési ideje, ezért

$$T = 3,1 \cdot 24 \cdot 3600 = 2,7 \cdot 10^5 \text{ s}.$$

Ha  $M \gg m$ ,

$$r = \left( \frac{\gamma MT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = \left( \frac{,67 \cdot 10^{-11} \cdot 0,8 \cdot 2,0 \cdot 10^{30} \cdot (2,7 \cdot 10^5)^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

$$r = 5,8 \cdot 10^{10} \text{ m} \approx 0,04 \text{ AU}.$$

(b) A sebességingadozás amplitúdója kb.

$$v_{\max} = 510 \text{ m/s}.$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_{\max}}{c} = \frac{510}{3,0 \cdot 10^8} = 1,7 \cdot 10^{-6}.$$

(c) A csillag keringési pályasugara a rendszer tömegközéppontja körül

$$r' = \frac{m}{M+m} r \approx \frac{m}{M} r$$

$$v_{\max} = \frac{2r'\pi}{T} = \frac{2\pi m}{MT} \cdot r,$$

így az (a) feladatból

$$v_{\max} = \frac{2\pi m}{MT} \cdot \left( \frac{\gamma MT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

$$m = \left( \frac{M^2 T}{2\pi\gamma} \right)^{1/3} \cdot v_{\max}$$

$$m = \left( \frac{(1,6 \cdot 10^{30})^2 \cdot 2,7 \cdot 10^5}{2\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}} \right)^{1/3} \cdot 510$$

$$m = 6,1 \cdot 10^{27} \text{ kg} \approx 3,2 m_{\text{Jup}}$$

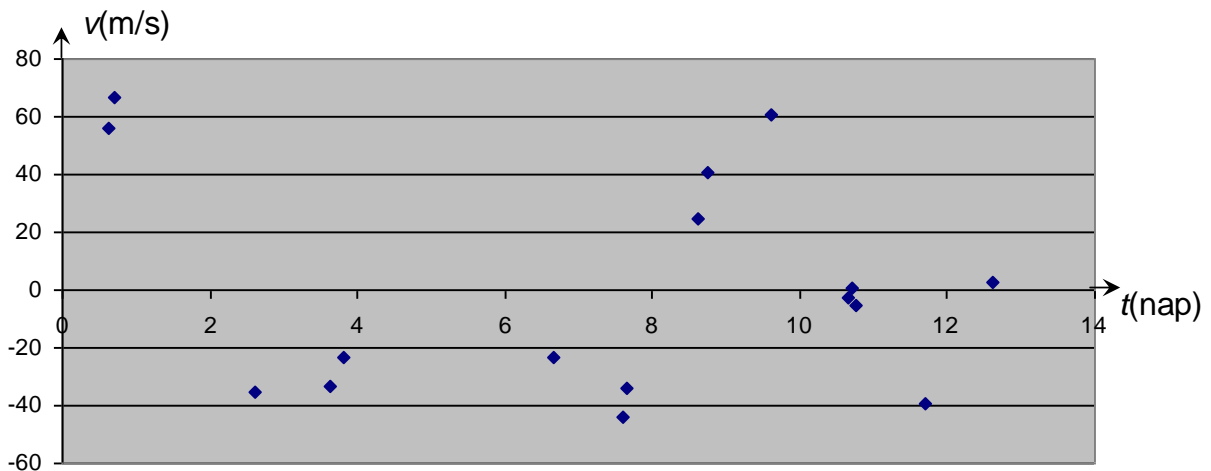
Csak alsó becslés, mivel nem tudjuk, milyen irányból látjuk a keringő bolygó pályáját. A maximális látóirányú sebesség csak akkor egyezik meg a valódi sebességgel, ha a megfigyelő benne van a keringési síkban. Ha a sík szöget zár be a látóiránnyal, akkor az észlelt sebesség kisebb a valódi sebességnél.

## 2.7

(a) A csillag körül több bolygó is kering.

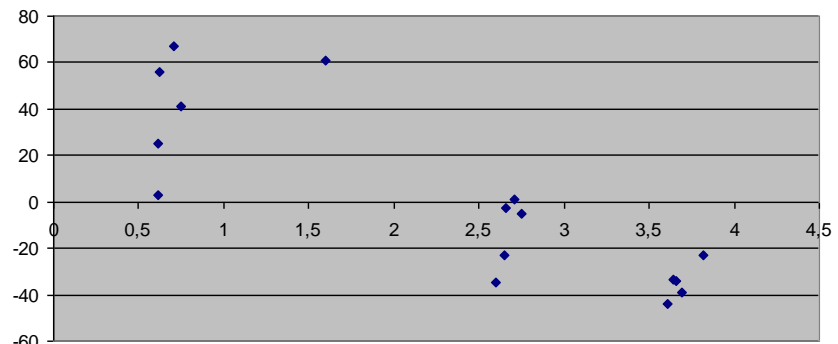
(b) A bolygó pályája erősen excentrikus.

**2.8** (a) Az ábrázolt pontokhoz szinuszos függvényt kellene illesztenünk, de a grafikon nem mutat szembetűnő periodicitást. Van egy maximum valahol 1 és 2 nap között, a következő maximumnál nincs adat, majd van egy csúcs valahol 9 és 10 nap között. Ez alapján próbálkozhatunk 4 napos periódussal: tekintsük az időadatokat mod 4.

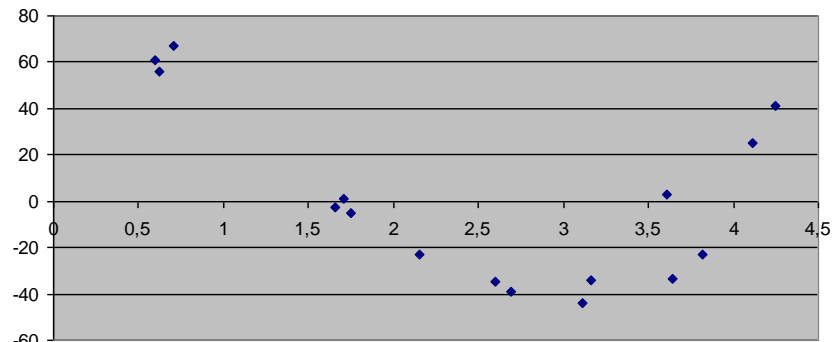


Idő (nap mod 4)	Sebesség (m/s)
0,62	56
0,71	67
2,60	-35
3,64	-33,5
3,82	-23
2,65	-23
3,61	-44
3,66	-34
0,61	25
0,75	41
1,60	61
2,66	-2,5
2,71	1
2,75	-5
3,69	-39
0,61	3

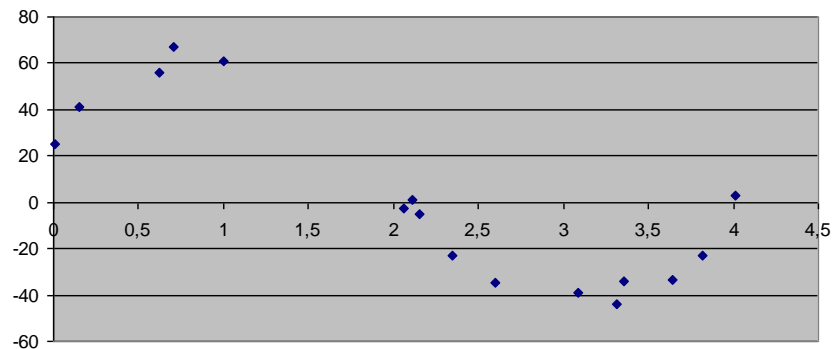
4 nap:



4,5 nap



4,25 nap



Kissé eltérő periódusokkal próbálkozva azt találjuk, hogy 3,5 nap rosszabbat, 4,5 nap viszont valamivel jobb eredményt ad. Ez már inkább görbét mutat, de nem szinuszcörbét (akkor találtuk meg a periódust, ha a grafikon egy szinuszos függvénynek egyetlen periódusát mutatja).

Tovább közelítve megállapíthatjuk, hogy a periódus 4,25 nap körül van.

(b) Nap-tömegű csillagra az évben kifejezett periódusidő négyzete egyenlő a csillagászati egységben kifejezett fél nagytengely köbével.

$$T = 4,25 \text{ nap} = 0,0116 \text{ év}$$

$$a = 0,0116^{2/3} = 0,0514 \approx 0,05 \text{ CSE}$$

A bolygó tehát mindössze huszadakkora távolságban kering a csillagától, mint a Föld. (Kb. a Merkúr távolságának nyolcada.)

(c) A becsléshez tételezzük fel, hogy a bolygó körpályán kering. Ekkor a bolygó sebessége

$$v_B = \frac{2\pi \cdot a}{T} = \frac{2\pi \cdot 0,0514 \cdot 1,5 \cdot 10^{11}}{4,25 \cdot 24 \cdot 3600} = 130000 \text{ m/s.}$$

Tételezzük fel továbbá, hogy a keringés síkjára „éléről” látunk rá, vagyis a fenti grafikonról leolvasható maximális sebesség a csillag sebessége. A grafikon maximum-értéke körülbelül +65 m/s. a minimum kb. -45 m/s, a sebességingadozás amplitúdója tehát kb. 55 m/s. A sebességek a tömeggel fordítottan arányosak, a bolygó tömege tehát

$$m_B = m_{\text{Nap}} \cdot \frac{v_{\text{Cs}}}{v_B} = 2 \cdot 10^{30} \cdot \frac{55}{130000} = 8 \cdot 10^{26} \text{ kg.}$$

Ez a Föld tömegének mintegy 140-szerese, a Jupiter tömegének pedig valamivel kevesebb, mint a fele.

**2.9** A Nap tömege  $2,0 \cdot 10^{30}$  kg, a Jupiter tömege  $1,9 \cdot 10^{27}$  kg, távolságuk  $7,8 \cdot 10^{11}$  m. A Nap a rendszer tömegközéppontja körül

$$\frac{m}{M+m} r \approx \frac{m}{M} r = \frac{1,9 \cdot 10^{27}}{2,0 \cdot 10^{30}} \cdot 7,8 \cdot 10^{11} \text{ m} = 7,4 \cdot 10^8 \text{ m}$$

sugarú, azaz  $1,5 \cdot 10^9$  m átmérőjű pályán kering. A megadott szög radiánban

$$10^{-4} \cdot \frac{2\pi}{360 \cdot 60^2} = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ rad.}$$

A keresett távolság tehát

$$\frac{1,5 \cdot 10^9}{4,8 \cdot 10^{-10}} = 3,1 \cdot 10^{18} \text{ m} \approx 100 \text{ pc nagyságrendű.}$$

**2.10** (a) A pályasugar 1000 fényév távolságból  $1 \cdot 10^{-5}$  szögmásodperces szög alatt látszik.

$$1000 \text{ fényév} = 9,5 \cdot 10^{18} \text{ m,}$$

$$1 \cdot 10^{-5}'' = 4,8 \cdot 10^{-11} \text{ rad, tehát}$$

$$r = 9,5 \cdot 10^{18} \cdot 4,8 \cdot 10^{-11} = 4,6 \cdot 10^8 \text{ m.}$$

Megjegyzés:

Ez már az a nagyságrend, amekkora sugarú pályán pl. a Nap is kering a Nap-Jupiter rendszer tömegközéppontja körül. (lásd 2.9 feladat).

(b) Tekintsük a távoli csillagot a Naphoz hasonlóknak, ekkor luminozitása  $4 \cdot 10^{26}$  W, intenzitásmaximuma 500 nm hullámhossznál van, ebből számoljuk egy foton energiáját:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-7}} = 4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

A másodpercenként kisugárzott fotonok száma

$$\frac{L}{E} = 1 \cdot 10^{45}$$

Ez a fotonmennyiség a  $9,5 \cdot 10^{18}$  m sugarú gömbön oszlik el, a detektorra csak az a hányada jut, amely a távcső tükrének  $0,75 \text{ m}^2$ -es felületén halad át:

$$1 \cdot 10^{45} \cdot \frac{0,75}{4\pi \cdot (9,5 \cdot 10^{18})^2} \approx 660000 \text{ foton.}$$

**2.11** (a) A Neptunusz pályájának sugara 30 CSE. Átmérője 60 CSE = 0,35 fénynap, a csillag elmozdulása kb. 30-szor ekkora.

(b) A fél nagytengely

$$a = 5 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 3 \cdot 10^8 = 1,3 \cdot 10^{14} \text{ m.}$$

A nagytengely egyik végpontjában tartózkodás időpontja 2002,33 év. Előtte a másik végpont körülbelül

$$\frac{1994,32 + 1995,53}{2} = 1994,9 \text{ év}$$

A különbség 7,4 év, vagyis a keringés periódusa kb. 15 év =  $4,7 \cdot 10^8$  s.

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}$$

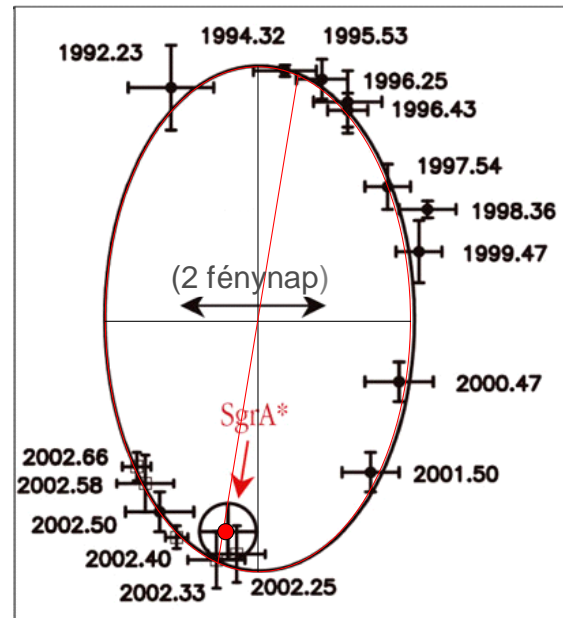
$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (1,3 \cdot 10^{14})^3}{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot (4,7 \cdot 10^8)^2} \approx 6 \cdot 10^{36} \text{ kg}$$

Ez a Nap tömegének hárommilliószorosa.

(c) A körülötte keringő csillag körülbelül 0,5 fénynap =  $1,3 \cdot 10^{13}$  m, azaz kevesebb, mint 90 CSE távolságra megközelíti a Sagittarius A\* objektumot. Ennél tehát biztosan kisebb.

Megjegyzés:

Ilyen nagy tömegű objektum ilyen kis helyre összezsúfolva nem lehet más, mint fekete lyuk.



### 3. Az űrkutatás és eszközei

## FÖLDKÖZELI ASZTEROIDÁK ÉS EGYÉB APRÓ ÉGITESTEK

**3.1** 2013. február 14-én 10 000 tonnás meteor csapódott a légkörbe 18 km/s sebességgel. Az oroszországi Cseljabinszk városa felett felrobbant, a detonáció tetemes kárt okozott, és a lökéshullám hatására kitört ablakokból repülő üvegcserépek miatt körülbelül ezren megsérültek. (Az eseményről a szemtanúk számos videofelvételt készítettek.)

(a) Hány kilotonna TNT robbanóerejének felel meg a cseljabinszki meteor energiája, ha 1 tonna TNT  $4,2 \cdot 10^9$  J-nak felel meg?

(b) Statisztikák szerint 4 méteresnél nagyobb objektumból évente átlagosan két darab érkezik a Föld teljes felszínére. A Föld felszínének 72%-a óceán, és a szárazföldeknek csak 3%-a lakott terület. Várhatóan körülbelül hány évenként hallhatunk a hírekben egy ilyen nagyméretű meteor becsapódásáról?

(c) A tűzgömbök olyan meteorok, amelyek kb.  $100 \text{ km}^2$  nagyságú területről látható fényes csíkot húznak maguk után az égen. Ha az esemény hangrobbanással is jár, bolidának nevezik. A bolidák tömege legalább fél kg. Becslések szerint ilyenből a Föld teljes,  $500$  millió  $\text{km}^2$ -es felületére évente  $50\,000$  db hullik. Körülbelül hány bolidát láthatsz életed során a saját szemeddel?



Jobbra: A cseljabinszki szuper-bolida <http://spacemath.gsfc.nasa.gov>, Balra: a Manicouagan-tó (Google Earth)

**3.2** Egy  $E$  (joule) energiájú meteorit becsapódásakor keletkező kráter  $D$  (km) átmérőjének kiszámítására alkalmazható a következő empirikus képlet:

$$D = 1,96 \cdot 10^{-5} \cdot E^{0,294}$$

(a) Mekkora krátert hoz létre egy  $20 \text{ km/s}$  sebességgel becsapódó,  $5 \cdot 10^9$  kg tömegű meteorit?

(b) A kanadai Québecben található ( $5 \text{ km}$  átmérőjű) Manicouagan-tó egy  $214$  millió évvel ezelőtti becsapódás  $100 \text{ km}$  átmérőjű meteorokráterének közepén alakult ki. Hány kilotonna TNT-nek megfelelő energia szabadult fel a becsapódáskor, ha  $1$  kilotonna TNT-nek  $4,2 \cdot 10^{12}$  J energia felel meg?

**3.3** Sok tényezőtől függ, hogy egy kisbolygó vagy üstökös mennyire látszik fényesnek a Földről. Számít például a mérete, a fényvisszaverő képessége, a Naptól való távolsága, és a megfigyelés ideje is, hiszen fontos, hogy teljesen meg van-e világítva (mint a telihold) vagy éppen nem a teljesen megvilágított oldaláról látjuk.

A sokféle változó együttes figyelembevételével alkották meg az alábbi empirikus képletet, amely a Naprendszer bármely részén jól használhatónak bizonyult. (Feltételezték, hogy az aszteroida visszaverőképessége olyan, mint a holdközveteké.)

$$R = 0,011 \cdot d \cdot 10^{-m/5}$$

$R$  az aszteroida mérete méterben kifejezve,  $d$  a Földtől való távolság kilométerben, az  $m$  szám pedig az aszteroida látszó fényességét fejezi ki a Földről nézve.  $m$  értéke annál kisebb, minél fényesebb objektumról van szó. A szabad szemmel épp látható objektumok esetében  $m \approx 6$ .

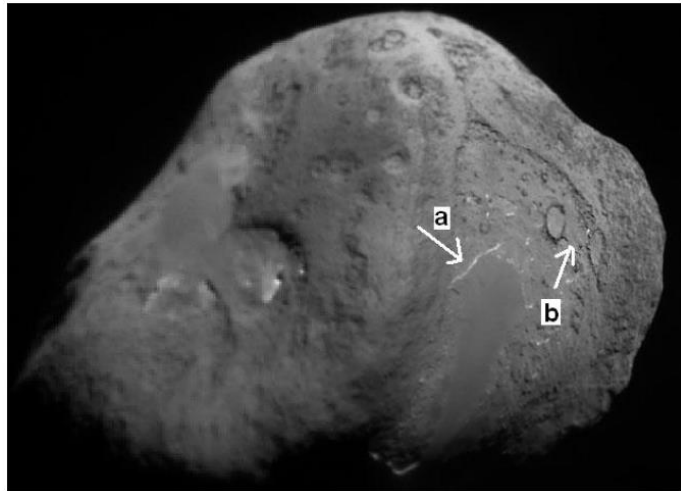
(a) Egy aszteroida 2027-ben fogja legjobban megközelíteni a Földet. Távolsága ekkor 37 000 km lesz. Írjuk fel számértékekkel az  $R$  mérete és  $m$  fényessége közötti összefüggést.

(b) Láthatjuk-e majd az aszteroidát, amennyiben a mérete 200 m és 1000 m között van?

**3.4** 2005. július 4-én a Deep Impact űrszonda 500 km távolságra megközelítette a Tempel 1 nevű üstökös magját. Az űrszonda részét képező Impactor lövedék végül belecsapódott az üstökösbe. Az első képen a becsapódásakor keltett fényfelvillanás és kiáramló gázfelhő látható.

(a) Az (Impactor által készített felvételekből összerakott) második kép szélessége 8,0 km. Körülbelül hány km az üstökös mag mérete? Mekkora a kép jobb oldalán látható kráterek? Mekkora a kép legkisebb, éppén kivehető részletei?

(b) Az Impactor lövedék a **b** nyíllal jelzett helyen csapódott az üstökösbe. Pályájának mekkora pontatlansága esetén vétette volna el a találkozást?



<http://spacemath.gsfc.nasa.gov>

**3.5** (a) A Tempel 1 üstökös mag átlagsűrűsége  $400 \text{ kg/m}^3$ , mérete 3 km sugarú gömbbel közelíthető. Mekkora a tömege?

(b) A 362 kg tömegű, 10,3 km/s sebességgel érkező szonda becsapódásának helyén kráter képződött, és kb. 10 000 tonna anyag lökődött ki. Ha az Impactor az üstökös mag pályájára merőlegesen haladva ütközött bele, mekkora oldalirányú sebességre tett szert az üstökös mag?

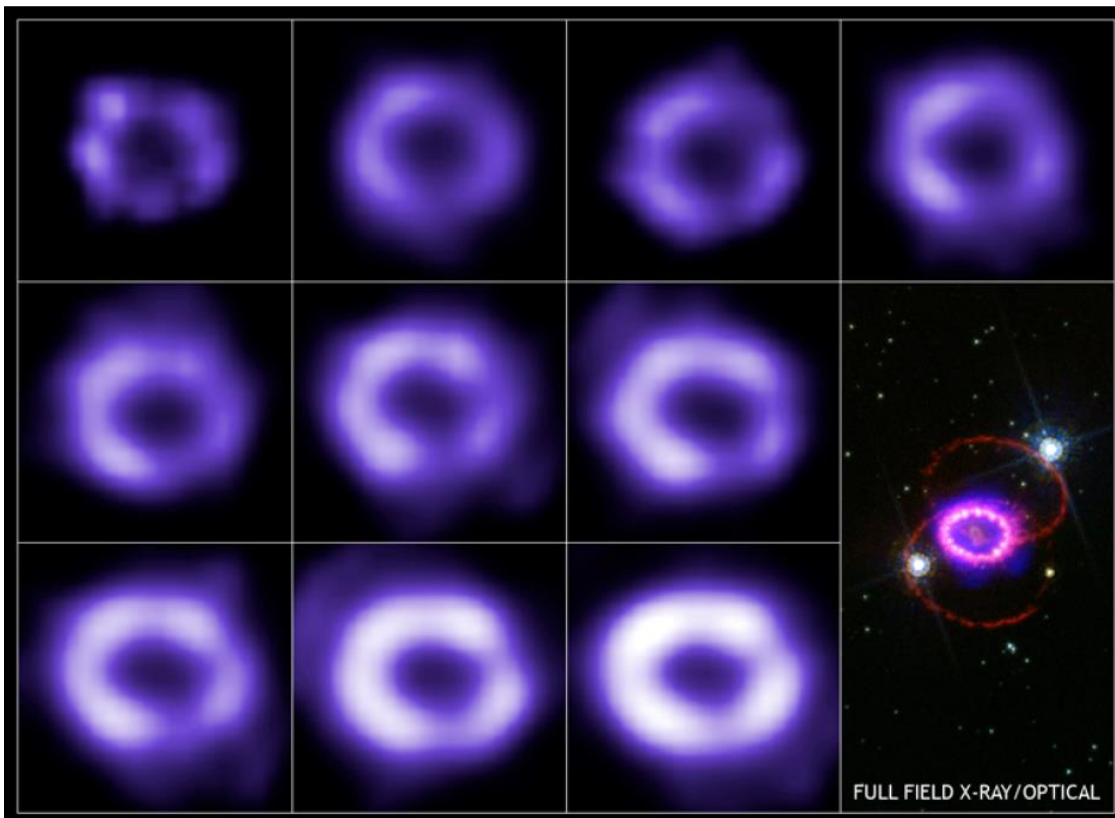
(c) Képzeld el, hogy ez az üstökös a Föld felé halad, és számítások szerint 50 év múlva beleütközik. Egy 10 megatonna TNT-nek megfelelő atombombát indítanak útnak úgy, hogy az üstökösbe ütközve felrobbanjon. Amikor a bombát szállító űrhajó odaér, az 50 évből még 20 év van hátra. A robbanás akkora impulzust adna az üstökösnek, mint ha a 10,3 km/s sebességgel beleütköző Impactor  $7,5 \cdot 10^8 \text{ kg}$  tömegű lett volna.

Feltéve, hogy az üstökös mag nem zúzódik porrá, hanem egyben marad, mennyivel térül le a pályájáról 20 év alatt? Elkerülhető-e ily módon a Földdel való ütközés?

### 3. Az űrkutatás és eszközei

## ŰRESZKÖZÖK ÁLTAL SZOLGÁLTATOTT ADATOK ÉRTELMEZÉSE ÉS ALKALMAZÁSA

**3.6** 1987 márciusában szupernóva-robbanást figyeltek meg a Nagy-Magellán-felhő nevű közeli galaxisban, mely a Tejútrendszerből 160 000 fényévre található. A robbanás helyéből ítélve a 20-szoros naptömeggel rendelkező, Sanduleak-69° 202a (röviden SK-69) nevű kék szuperóriásból lett a szupernóva. Az alábbi felvételsorozat millió fokos hőmérsékletű táguló gázfelhőt ábrázol, 2000 januárja (bal felső kép) és 2005 januárja között (jobb alsó kép) készítette a Chandra röntgenteleszkóp. Átlagosan mekkora sebességgel tágul a gázfelhő, ha az egyes képek szélessége 1,9 fényév?



<http://spacemath.gsfc.nasa.gov>

**3.7** 2017-ben 40 éves évfordulóját ünnepelhetjük a mindeddig legtávolabra eljutott, ember készített űreszköz, a Voyager-1 űrszonda felbocsátásának. A Voyager-1 1977-ben indult útjára, 17 km/s sebességgel távolodik, és kommunikációs rendszere még mindig működik.

(a) Milyen messze jár jelenleg?

(b) Mennyi idő alatt jut el a legközelebbi csillag távolságába?

(c) A Jupiter 3630 km átmérőjű Io nevű holdján intenzív vulkáni tevékenység figyelhető meg. A Voyager-1 által készített képen a *Prometheus* nevű vulkán kitörése látható. (A vulkánokat hagyományosan a különböző népek mitológiáiban szereplő istenségekről nevezik el.)

A kép alapján adj becslést arra, hogy milyen magasra lövell a Prometheus által kidobott anyag.

(d) Az Io sűrűsége  $3,55 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  (közel van a mi Holdunk  $3,34 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  sűrűségéhez.) Mekkora sebességgel hagyja el a tűzhányót a kilövellt anyag?

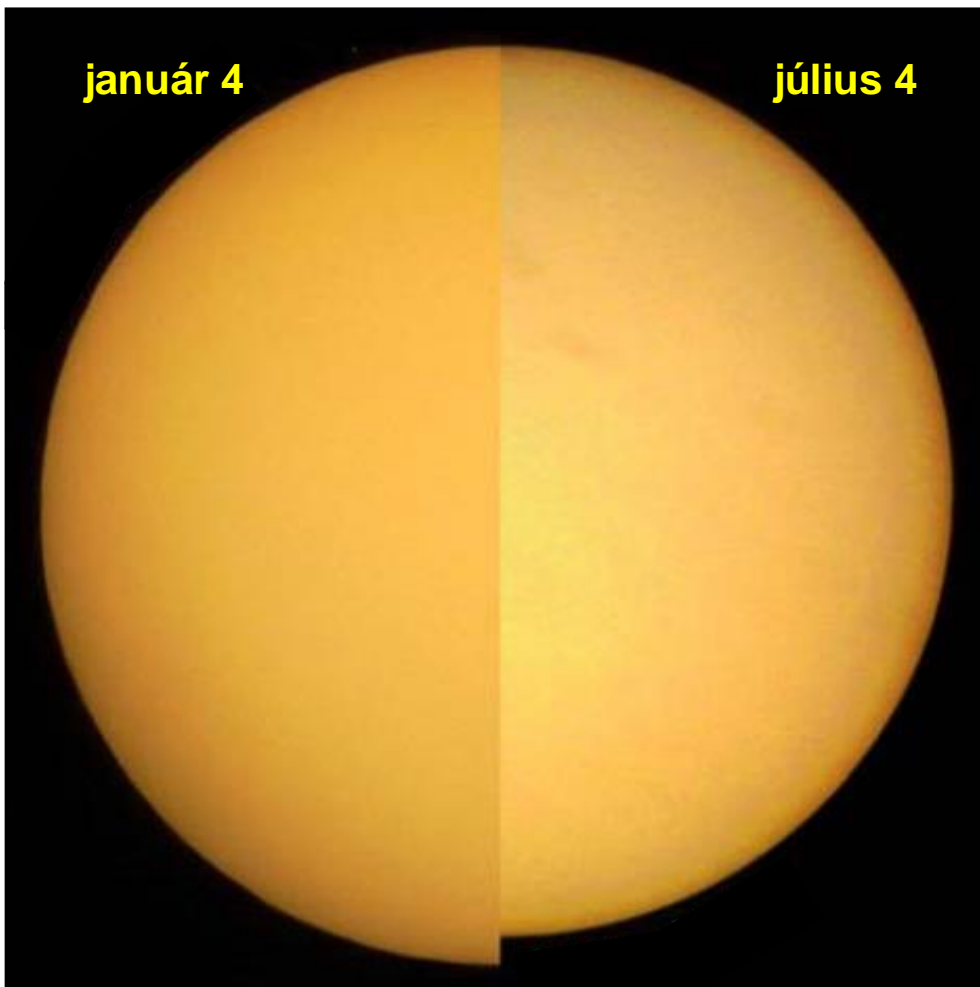


**3.8** A képen látható két felvételt a Föld pályáján keringő SOHO műhold készítette a Napról abban a két időpontban, amikor a legközelebb, illetve a legtávolabb van tőle.

(a) Mikor van legközelebb, és mikor a legtávolabb?

(b) A kép alapján határozd meg, hány százalékkal tér el a két távolság az átlagostól.

(c) Ha a Naptól való átlagos távolság 149 600 000 km, mennyivel van közelebb a Föld napközelen, mint naptávolban?



<http://spacemath.gsfc.nasa.gov>

**3.9** (a) A Nap sugárzási teljesítménye (luminozitása)  $L = 3,9 \cdot 10^{26}$  W. A Pluto napközeli távolságban 31 CSE, naptávoli távolságban 49 CSE távolságra van a Naptól. A Pluto forog a tengelye körül. Időátlagban hány  $W/m^2$  a Pluto légkörét érő sugárzás intenzitása napközeli távolságban, illetve naptávoli távolságban?

(b) Mielőtt a New Horizons űrszonda 2015-ben elhaladt a Pluto mellett, a Pluto légköréről igen keveset tudtunk. Az űrszonda adatai alapján a Pluto metánból álló légköre a rá eső fény 60%-át veri vissza (azaz a Pluto albedója 0,6), a többit elnyeli. Ebből az adatból becslést tudunk adni a légkör hőmérsékletére. Mivel a légkör hőmérsékleti egyensúlyban van, az elnyelttel azonos mennyiségű energiát ki is sugároz a világűrbe. Mennyi a légkör  $T$  abszolút hőmérséklete napközeli távolságban, illetve naptávoli távolságban, ha a kisugárzás intenzitása  $\sigma \cdot T^4$ , és a  $\sigma$  konstans értéke  $5,67 \cdot 10^{-8} W/(m^2 K^4)$ ?

### 3. Az űrkutatás és eszközei

## MODERN MŰHOLDOK GEOMETRIÁJA

**3.10** A STEREO műhold-pár a Nap körül kering. Egyikük a Föld pályáján kissé belül, a másik pedig kissé kívül. Így két nagy távolságra levő pontból, különböző irányból tudják egyidejűleg megfigyelni ugyanazt a jelenséget, ezáltal képesek 3 dimenziós képet alkotni napkitörésekről, viharokról és más, a Nap felszínén vagy annak közelében lejátszódó eseményekről. Vizsgálhatók velük a Naptól a Föld felé haladó plazmafelhők is. Meghatározható a távolságuk, sebességük, alakjuk, stb.

Az ábrán N a nap, F a Föld, A és B a két STEREO műhold, és egy koronakitörésből származó C plazmafelhő közelít a Földhöz.

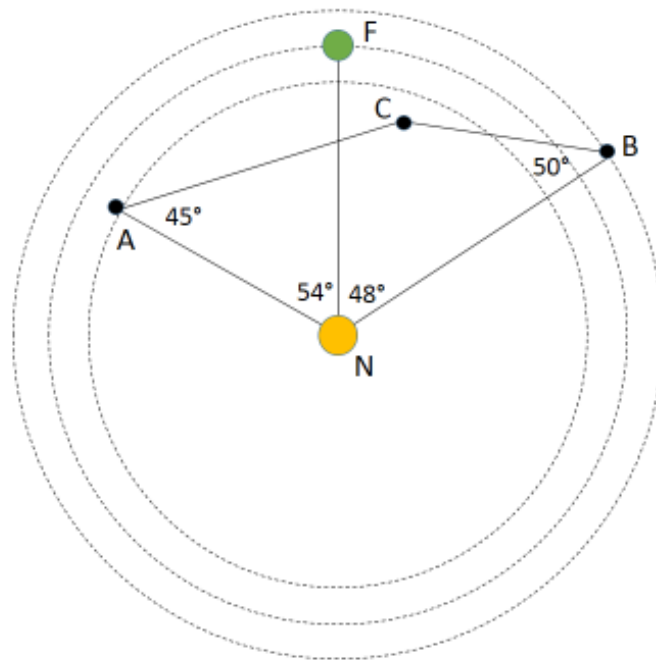
Az A műhold mérése szerint az SAC szög  $45^\circ$ , B műhold szerint pedig az SBC szög  $50^\circ$ .

A mérés pillanatában az ANF szög  $54^\circ$ , a BNF szög  $48^\circ$ .

A Föld pályája 150 millió km sugarú körnek tekinthető, az A műhold pályasugara 145 millió km, a B műholdé 156 millió km.

(a) Határozd meg a CF távolságot és a CNF szöget.

(b) Ha a napkitörésből származó plazmafelhő 2 millió km/h sebességgel halad, mennyi idő alatt tette meg az NC távolságot?

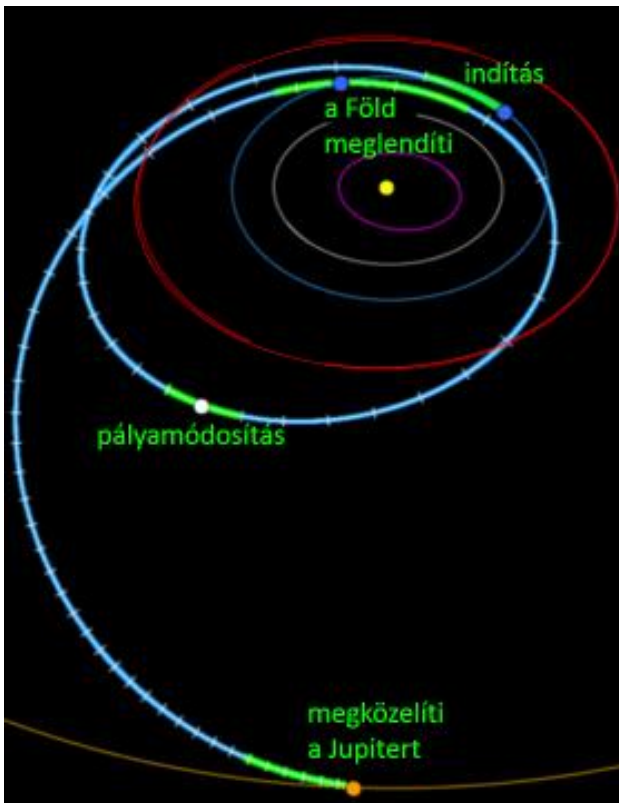


**3.11** A Juno űrszondát 2011 augusztusában bocsátották fel. Kezdeti ellipszispályáját úgy tervezték meg, hogy a rakétái segítségével 2012 augusztusában végrehajtott pályamódosítás után 2013 októberében a Föld közelében haladjon el. A Föld gravitációs vonzása további befektetett energia nélkül átlendítette az űrszondát arra a Nap körüli ellipszispályára, amelyen aztán eljuthatott a Jupiterhez. (Lásd az ábrát.) A Jupiteret megközelítő pálya egyenlete

$$5,15x^2 + 9,61y^2 = 49,49$$

ahol a távolságok csillagászati egységben értendők.

(a) Számítsd ki a pálya fél nagytengelyének és fél kistengelyének hosszát, a pálya excentricitását, valamint a perihélium- és az aphéliumtávolságot.



<http://spacemath.gsfc.nasa.gov>

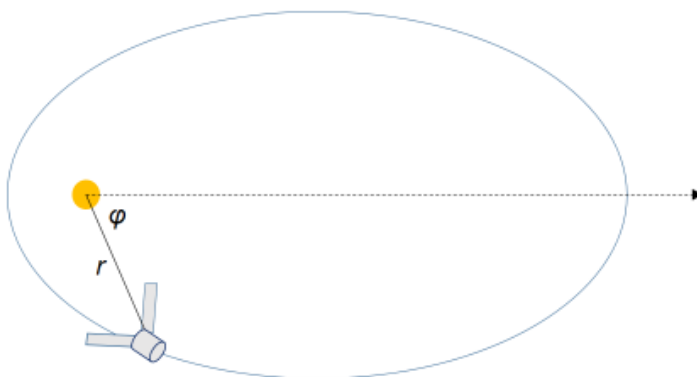
(b) Mikor érkezett meg az űrszonda a Jupiterhez?

**3.12** Ahogyan a Nap körüli ellipszispályán haladó Juno űrszonda a Jupiter felé utazott, a Naptól való távolsága fokozatosan csökkent. Mivel a Juno napelemekkel termelte az elektromos energiát, a távolságnövekedéssel négyzetesen csökkent az így elérhető teljesítmény. A Föld távolságában a napelemek által megtermelt teljesítmény 12 690 W volt.

Tudjuk, hogy az ellipszis fókuszától való  $r$  távolság a következőképpen adható meg a  $\varphi$  szög függvényeként:

$$r = a \cdot \frac{1 - e^2}{1 - e \cdot \cos \varphi}$$

A Juno űrszonda pályájának fél nagytengelye körülbelül 3,0 CSE, excentricitása körülbelül 2/3.



(a) A  $\varphi$  szög mekkora értékénél lesz a teljesítmény negyedakkora, mint 1 CSE távolságra?

(b) Mennyi volt a teljesítmény, amikor az űrszonda a pályájának legtávolabbi pontjánál megérkezett a Jupiterhez?

### 3. Az űrkutatás és eszközei

## AZ ÉSZLELÉS FELBONTÁSÁNAK JAVÍTÁSA

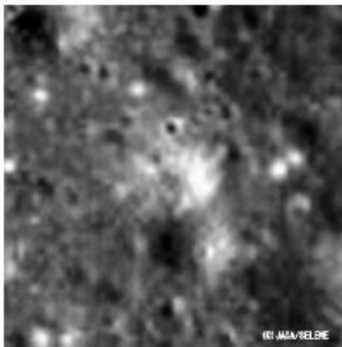
**3.13** Egy optikai eszköz szögfelbontása az a legkisebb szögtávolság két tárgy pont között, amely esetén az eszköz által alkotott képen még két különálló pontként lehet őket azonosítani.  $D$  átmérőjű kör alakú nyíláson belépő  $\lambda$  hullámhosszúságú hullámok esetén a szögfelbontás

$$\alpha = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}.$$

- (a) A Hubble-űrtávcső tükrének átmérője 2,4 m. Mekkora a szögfelbontása?
- (b) Milyen messze lehetne egy Nap méretű csillag, hogy a Hubble meg tudja különböztetni egy pontszerű fényforrástól (azaz kiterjedt fényforrásként észlelhesse)? Láthatjuk-e a Hubble segítségével Naphoz hasonló méretű csillagok korongját?
- (c) A Betelgeuse ( $\alpha$  Orionis) 1200-szor akkora, mint a Nap, és 430 fényév távolságra van. Láthatjuk-e a Hubble segítségével a Betelgeuse korongját?

**3.14** Az alábbi két felvétel az Apollo–15 holdraszállásának helyszínéről készült. (A másodikon a kép közepe táján látható az Apollo–15 leszállóegység vízszintesen húzódó árnyéka is.)

- (a) Melyik képet készítette a japán Kaguja műhold (10 m/pixel képfelbontás, blendeméret kb. 15 cm), és melyiket a Lunar Reconnaissance Orbiter (LRO) műhold (1,0 m/pixel képfelbontás, blendeméret 0,8 m)?



<http://spacemath.gsfc.nasa.gov>

- (b) Az LRO műhold keringési magassága 50 km volt. A Hold felszíne felett milyen magasságból készítette a felvételt a Kaguja műhold?

**3.15** (a) Mekkora legyen egy 21 cm-es hullámhosszon érzékeny rádiótávcső antennájának átmérője, hogy a szögfelbontása megegyezzen egy 15 cm átmérőjű tükrös távcsőével?

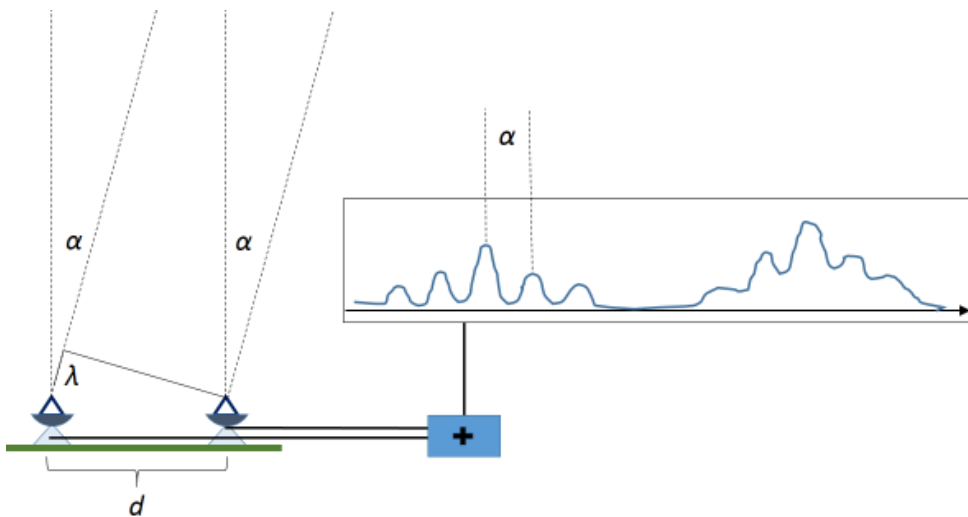
Megjegyzés:

Ekkora rádióantennát nyilvánvalóan képtelenség építeni. A kívánt felbontás azonban elérhető interferometria használatával, azaz két kisebb rádiótávcsőnek egymástól ilyen nagyságrendű távolságra való elhelyezésével.

(b) Két interferométerként összekapcsolt, egymástól kelet-nyugati irányban levő,  $\lambda$  hullámhosszúságú rádióhullámok vételére beállított rádiótávcső a meridiánra van irányítva. A két antenna  $d$  távolsága (bázisvonal) a hullámhossz ezerszerese.

Ahogy a Föld lassan elfordul, egy adott rádióforrásból a két antennára érkező jel fáziskülönbsége változik. Ahogy a forrás lassan átvonul a távcsövek látómezején, a két antenna által vett jelet elektronikusan összeadva erősítések és gyengítések követik egymást.

Milyen pontossággal tudja a műszer megállapítani a forrás irányát, azaz mekkora az ábrán az  $\alpha$  szög?



(c) Hogyan változik a felbontás, ha a két antenna nem a meridiánra van irányítva?

(d) Az ábrán két különböző forrásból származó összegzett jel látható. Az első esetben a maximumok között kioltások vannak, a második esetben a minimumoknál sem nulla az összeg. Mi lehet a különbség a két forrás között?

**3.16** (a) Az egymástól egyenes vonalban 2900 km távolságra lévő Onsalában (Svédország) és Amherstben (USA, Massachusetts állam, 2011-ig) működő rádiótávcsöveket nagyon hosszú bázisvonalú interferométerként (VLBI) alkalmazva mekkora felbontást lehetett elérni 22 GHz-es frekvencián?  
 (b) Mekkora lenne egy ilyen felbontású optikai távcső átmérője?

**3.17** Mekkora maximális felbontás érhető el 5000 km bázisvonalú rádióinterferometriával 5 GHz frekvencián?

### Megoldások 3.

$$3.1 \text{ (a) } E = \frac{1}{2}mv^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10000000 \cdot 18000^2 = 1,6 \cdot 10^{15} \text{ J}$$

ez megfelel 386 kilotonna TNT-nek. (Mint kb. 10 db kisebb atombomba.)

(b) A lakott terület az egész Földnek csak 0,8%-a, azaz 1/125 része. Évente két eseményből ez 1/62, tehát kb. 62 évenként hallhatunk róla, vagyis egy emberélet alatt egyszer, esetleg kétszer.

(c) Egy bolida 1/125 valószínűséggel érkezik lakott területre, ez az évi 50 000-ból 400 darab. Ahhoz hogy lássuk, a megfelelő 100 km<sup>2</sup> nagyságú területen kell tartózkodnunk. Ez az egész Földnek 1/500 000 része, a lakott területnek az 1/40 000 része. 400/40 000 = 100, évente tehát 1 százalék az esélyünk, átlagosan. Vagyis ha egész életünkben az eget kémleljük, akkor átlagosan 100 évenként láthatunk ilyen eseményt.

### 3.2 (a)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^9 \cdot 20000^2 = 1,0 \cdot 10^{18} \text{ J}$$

$$\lg D = \lg(1,96 \cdot 10^{-5}) + 0,294 \cdot \lg E$$

$$\lg D = \lg(1,96 \cdot 10^{-5}) + 0,294 \cdot 18 = 0,584$$

$$D = 3,8 \text{ km}$$

$$(b) \lg D = \lg(1,96 \cdot 10^{-5}) + 0,294 \cdot \lg E$$

$$\lg 100 = \lg(1,96 \cdot 10^{-5}) + 0,294 \cdot \lg E$$

$$6,71 = 0,294 \cdot \lg E$$

$$\lg E = 22,8$$

$$E = 6,54 \cdot 10^{22} \text{ J}$$

Ez megfelel 1,6 · 10<sup>10</sup> kilotonna TNT-nek.

$$3.3 \text{ (a) } R(m) = 0,011 \cdot 37\,000 \cdot 10^{-0,2m} =$$

$$= 407 \cdot 10^{-0,2m}$$

$$(b) \lg R = -0,2m + \lg 407 = -0,2m + 2,6$$

$$m = \frac{\lg R - 2,6}{-0,2} = 13 - 5 \lg R$$

Ha 200 < R < 1000, akkor

$$2,3 < \lg R < 3$$

$$1,5 > 13 - 5 \lg R > -2$$

Igen, jól látható lesz.

**3.4 (a)** Ha a kép 16 cm-es, akkor 1 cm megfelel 500 m-nek. Az üstökös mag legnagyobb mérete kb. 14 cm, azaz 7 km, erre merőlegesen 11 cm, azaz 5,5 km. A kráterek mérete 8 mm, azaz 400 m. Kb. 1 mm-es, azaz 50 méteres részletek még kivehetők.

(b) Ha a képen 2 cm-rel jobbra haladt volna, akkor elvétí. Ez mindössze 1 km pontatlanságot enged meg.

Megjegyzés:

Mivel a Földtől való távolsága kb. százmillió km, a pályáját egy-százmilliomodnál kisebb relatív hibával kellett meghatározni.

$$3.5 \text{ (a) } M = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 =$$

$$= 400 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3000^3 = 4,5 \cdot 10^{13} \text{ kg}$$

(b) A tömegváltozás az üstökös mag tömegéhez viszonyítva elhanyagolható. A lendület-megmaradás törvénye alapján

$$mv = Mv'$$

$$v' = v \frac{m}{M} = 10300 \cdot \frac{362}{4,5 \cdot 10^{13}} =$$

$$= 8,2 \cdot 10^{-8} \text{ m/s} = 2,6 \text{ m/év}$$

(c) Ezúttal

$$v' = v \frac{m}{M} = 10300 \cdot \frac{7,5 \cdot 10^8}{4,5 \cdot 10^{13}} =$$

$$v' = 0,17 \text{ m/s} = 5400 \text{ km/év}$$

20 év alatt ez 108 000 km. A Föld átmérője csak 13 000 km, az ütközés tehát elkerülhető.

**3.6** Ha pl. a képek 38 mm-esek, 1 mm 0,05 fényévnek felel meg. Az első képen a felhő szélessége 25 mm, az utolsón 37 mm, az átmérő növekedése így 12 mm, a sugáré 6 mm. Ez 0,3 fényévnyi tágulást jelent 5 év alatt, az átlagsebesség tehát  $3/50$  fénysebesség, azaz kb.  $1,8 \cdot 10^7$  m/s.

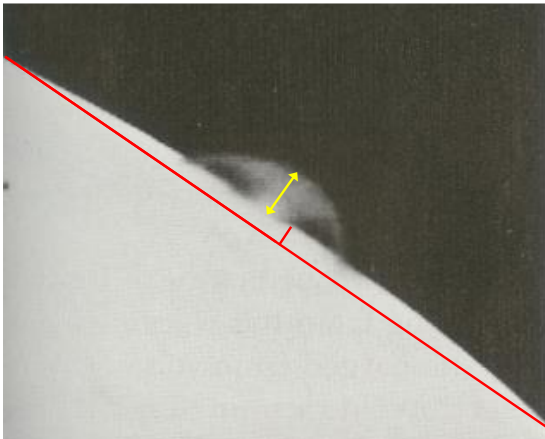
**3.7** 1977-től 2017-ig 40 év telt el.

$$(a) s = vt = 40 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 17\,000 = 2,1 \cdot 10^{13} \text{ m} = 140 \text{ CSE}$$

(b) A szonda sebessége  $5,67 \cdot 10^{-5}c$ , a legközelebbi csillag 4,3 fényévre van.

$$t = \frac{4,3}{5,67 \cdot 10^{-5}} = 76000 \text{ év}$$

(c) Ha a képen látható ív leghosszabb húrja 216 mm, a körszelet magassága 7,2 mm.



$$R^2 = 108^2 + (R - 7,2)^2$$

Ebből  $R = 810$  mm, ez felel meg 1815 km-nek. A felhő magassága 17,2 mm, azaz

$$\frac{17,2}{810} \cdot 1815 = 39 \text{ km}$$

(d) Az Io tömege  $M = \frac{4\pi\rho R^3}{3} =$

$$= \frac{4\pi \cdot 3,55 \cdot 10^3 \cdot (1,82 \cdot 10^6)^3}{3} = 8,9 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

Felszíni gravitációs gyorsulással számolva

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{4\pi G\rho R}{3} = \frac{4\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-10} \cdot 3550 \cdot 1,82 \cdot 10^6}{3} = 1,8 \text{ m/s}^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 1,8 \cdot 39000} = 370 \text{ m/s}$$

Megjegyzés:

A Földön a legintenzívebb vulkánkitörések (Krakatoa, St. Helens, stb.) alkalmával is csak 100 m/s körüli maximális sebességek fordulnak elő. Valószínű, hogy az Io vulkánosságában a földtől alapvetően különböző jelenségek is szerepet játszhatnak.

**3.8** (a) Közel január 4-én, távol július 4-én.

(b) Ha a képen a nagyobb átmérő 122 mm, akkor a kisebb 118 mm. Átlagosan 120 mm. Az átlagtól való eltérés 2 mm,  $2/120 = 1,7\%$

A távolság fordítottan arányos a látszólagos mérettel, tehát az eltérésre  $\pm 1,7\%$  adódik.

(c) A különbség

$$149\,600\,000 \cdot \frac{122 - 118}{120} \approx 5\,000\,000 \text{ km}$$

**3.9** (a)  $r_1 = 31 \cdot 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m} = 4,7 \cdot 10^{12} \text{ m}$ ,

$$r_2 = 49 \cdot 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m} = 7,3 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

A napsugárzás intenzitása a Naptól  $r$  távolságban.

$$\frac{L}{4\pi \cdot r^2}$$

A forgás miatt a Pluto felületére időátlagban beeső intenzitás ennek a negyede:

$$I = \frac{L}{16\pi \cdot r^2}$$

$$I_1 = 0,35 \text{ W/m}^2, I_2 = 0,15 \text{ W/m}^2,$$

Elnyelt intenzitás = kisugárzott intenzitás:

$$0,4 I = \sigma T^4$$

$$T_1 = \sqrt[4]{\frac{0,4 \cdot 0,35}{5,67 \cdot 10^{-8}}} = 40 \text{ K},$$

$$T_2 = \sqrt[4]{\frac{0,4 \cdot 0,15}{5,67 \cdot 10^{-8}}} = 32 \text{ K}.$$

Megjegyzés:

1. A valóságban ennél valamivel nagyobbak a hőmérsékletek, az átlagérték kb. 50 K.

2. A légkör vastagsága a keringés folyamán folyamatosan változik, a hőmérséklettel kb. arányosan. Amikor a metán fokozatosan ráfagy a felszínre, a légkör vékonyodik.

**3.10** (a) Az ANB háromszögben  
 $\angle ANB = 54^\circ + 48^\circ = 102^\circ$ .

Koszinusztétellel

$$AB^2 = 145^2 + 156^2 - 2 \cdot 145 \cdot 156 \cdot \cos 102^\circ$$

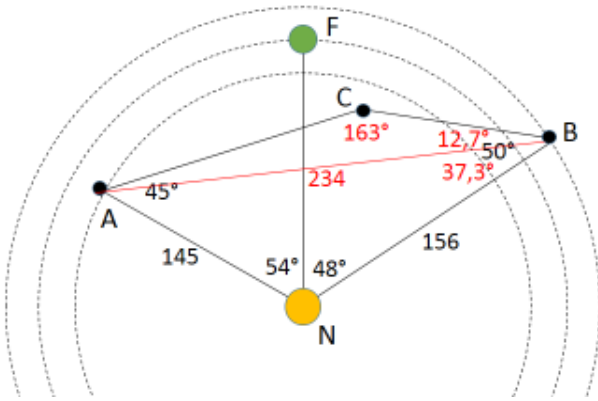
$$AB = 234.$$

Az NBA háromszögben szinusztétellel

$$\sin \angle NBA = \sin 102^\circ \cdot \frac{145}{234}$$

$\angle NBA < 102^\circ$ , tehát  $\angle NBA = 37,3^\circ$ .

$$\angle ABC = 50^\circ - 37,3^\circ = 12,7^\circ$$



Az ABC háromszögben szinusztétellel

$$AC = 234 \cdot \frac{\sin 12,7^\circ}{\sin 163^\circ} = 176.$$

Az ACN háromszögben a CN oldal koszinusztétellel:

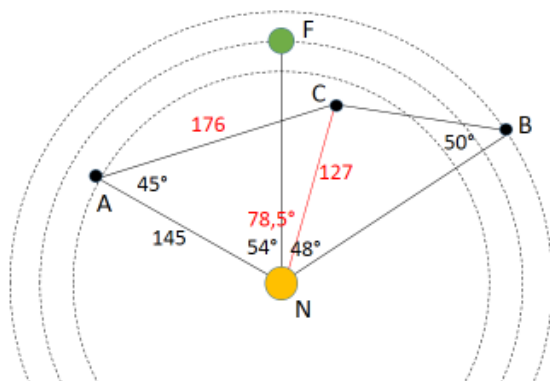
$$CN^2 = 150^2 + 176^2 - 2 \cdot 150 \cdot 176 \cdot \cos 45^\circ$$

$$CN = 127 \text{ millió km.}$$

Szinusztétellel

$$\sin \angle ANC = \sin 45^\circ \cdot \frac{176}{127}$$

$\angle ANC < 102^\circ$ , tehát  $\angle ANC = 78,5^\circ$ .



A keresett FNC szög tehát  
 $78,5^\circ - 54^\circ = 24,5^\circ$ .

Az FNC háromszögben a CF oldal koszinusztétellel:

$$CF^2 = 150^2 + 127^2 - 2 \cdot 150 \cdot 127 \cdot \cos 24,5^\circ$$

$$CF = 63 \text{ millió km.}$$

(b)  $CN = 127$  millió km, a sebesség 2 millió km/h, tehát kb 60 óra alatt ért C-be.

**3.11** (a)  $\frac{x^2}{9,61} + \frac{y^2}{5,15} = 1$

$$a = 3,1 \text{ CSE}, \quad b = 2,3 \text{ CSE}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2,1, \quad e = c/a = 0,68.$$

Perihélium:  $3,1 - 2,1 = 1,0$  CSE,

aphélium:  $3,1 + 2,1 = 5,2$  CSE.

Vagyis a Föld, illetve a Jupiter távolsága a Naptól.

(b) Kepler III. törvénye alapján (a távolság csillagászati egységben, az idő évben mérve)

$$T = a^{3/2} = 3,1^{3/2} = 5,5 \text{ év}$$

2013 októberében volt a Föld távolságában.

Fél periódus, azaz 2 év és 9 hónap múlva, 2016 júniusában vagy júliusában érkezett a Jupiterhez.

**3.12** (a)  $r = a \cdot \frac{1 - e^2}{1 - e \cdot \cos \varphi}$ ,

A szonda adataival

$$r = 3 \cdot \frac{\frac{5}{9}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \cos \varphi} = \frac{5}{3 - 2 \cos \varphi}$$

A teljesítmény akkor csökken negyedére, amikor a távolság megkétszereződik. A Föld távolságában  $r = 1$ , tehát

$$\frac{5}{3 - 2 \cos \varphi} = 2$$

$$\varphi = 76^\circ$$

(b) A naptávpontban  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\cos \varphi = 1$ .

$$r = \frac{5}{3 - 2 \cdot 1} = 5$$

5 CSE távolságra a teljesítmény már 1/25 részére csökken:

$$12\,690 / 25 = 508 \text{ W.}$$

**3.13** (a)

$$\alpha = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} = 1,22 \cdot \frac{5,5 \cdot 10^{-7}}{2,4} = 2,8 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$

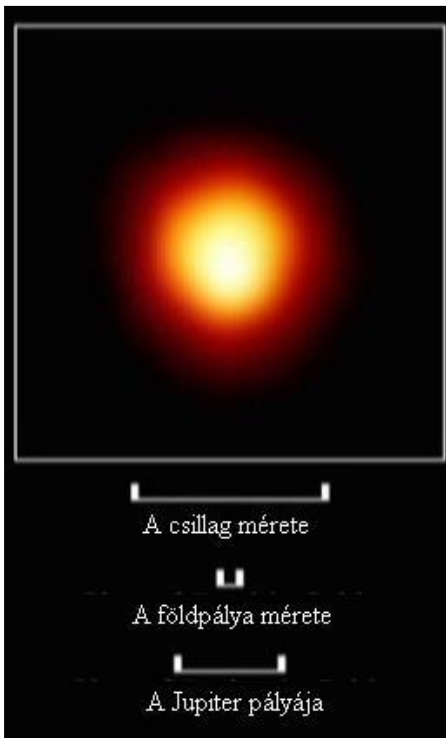
(b) A csillag látászögének ennél nagyobbak kell lennie.

Nap átmérője  $1,4 \cdot 10^9$  m, tehát

$$d < \frac{1,4 \cdot 10^9}{2,8 \cdot 10^{-7}} = 5,0 \cdot 10^{15} \text{ m} = 0,53 \text{ fényév}$$

A legközelebbi csillag is több, mint 4 fényévre van, a Hubble nem tudja felbontani.

(c) Igen,  $430/0,53 = 810 < 1200$



A Hubble felvétele a Betelgeuse-ről  
(forrás: Hudoba Gy. doktori értekezése, ELTE, 2016.)

**3.14** (a) Az LRO készítette a jobb felbontású második képet.

(b) Az LRO szögfelbontása a lencseátmérők arányában  $0,8/0,15 = 5,3$ -szeres.

A képfelbontás 10-szer jobb, tehát a másik műhold  $10/5,3 = 1,9$ -szer magasabbról, 94 (kb. 100) kilométerről fényképezett.

**3.15** (a) Adott szögfelbontás esetén a szükséges átmérő a hullámhosszal arányos. Az optikai távcső esetében 550 nm hullámhosszal számolva

$$D_2 = D_1 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0,15 \cdot \frac{0,21}{5,5 \cdot 10^{-7}} = 57 \text{ km}$$

(b) (Nem kerek nyíláson való elhajlásról van szó, nem kell az 1,22-os szorzó.)

$$\alpha \approx \sin \alpha = \frac{\lambda}{d} = 0,001 \text{ rad.}$$

(c) A nevezőbe  $d$  helyett kisebb effektív távolságot kell írni, így nagyobb szöget kapunk, a felbontás gyengébb.

(d) Az első jel pontszerűnek tekinthető forrásból származik, a második forrás viszont az interferométer felbontásához képest nagy kiterjedésű: a különböző pontjaiból érkező jelek nem ugyanakkor oltják ki egymást.

**3.16** (a) A 22 GHz-es rádióhullám hullámhossza

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3,0 \cdot 10^8}{22 \cdot 10^9} = 0,014 \text{ m}$$

Az erősítési irányok közötti szögtávolságra:

$$\begin{aligned} \sin \alpha (\approx \alpha) &= \frac{\lambda}{d} = \\ &= \frac{0,014}{2,9 \cdot 10^6} = 4,7 \cdot 10^{-9} \text{ rad} = 1,0010'' \end{aligned}$$

(b) 550 nm hullámhosszal számolva:

$$D = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{1,22 \cdot 550 \cdot 10^{-9}}{4,7 \cdot 10^{-9}} = 140 \text{ m.}$$

$$\mathbf{3.17} \quad \alpha = \frac{\lambda}{d} = \frac{c}{fd} =$$

$$= \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^6} = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ rad} = 0,0025''$$

## 4. Mérések, önálló tanulói tevékenységet kívánó feladatok

**4.1** Az alábbi idézet és az akkori nyomdai eszközökkel készült szemléltető ábra Galileo Galilei *Sidereus Nuncius* című művéből (1610) való, amelyben elsőként számol be a Jupiter körül keringő holdak felfedezéséről. Galilei négy holdat fedezett fel, ebben az első feljegyzésben azonban csak három holdról ír.

A Stellarium nevű ingyenesen letölthető program segítségével rekonstruáld a Galilei által aznap este látottakat. Vajon miért csak hármat látott? Mit jelenthet az, hogy „az éjszaka első órájában”?

*Szóval, a jelen ezerhatszázötödik esztendő január havának hetedik napján, az éjszaka első órájában, midőn az égbolt csillagait néztem a távcsövön keresztül, utamba került a Jupiter. Mivel pedig igen jó műszert használtam (ami azelőtt a másik eszköz gyenge volta miatt nem sikerülhetett), három kis csillagocskát láttam mellette állni, kicsiket, de fényeseket. Ezek, bár állócsillagnak hittem őket, nem kis csodálkozásomat váltották ki, mivel pontosan egyenes vonalban látszottak az ekliptikával párhuzamosan, és a többi hasonló nagyságúnál ragyogóbbak voltak. Egymás közt és a Jupiterhez képest így helyezkedtek el:*



*vagyis a keleti oldalon két csillag volt, egy pedig nyugaton. A keletibb és a nyugati a harmadiknál kissé fényesebbnek tűnt. Az egymás és a Jupiter közti távolságaik legkevésbé sem izgattak, mivel mint mondottuk már, állócsillagnak hittem őket.*

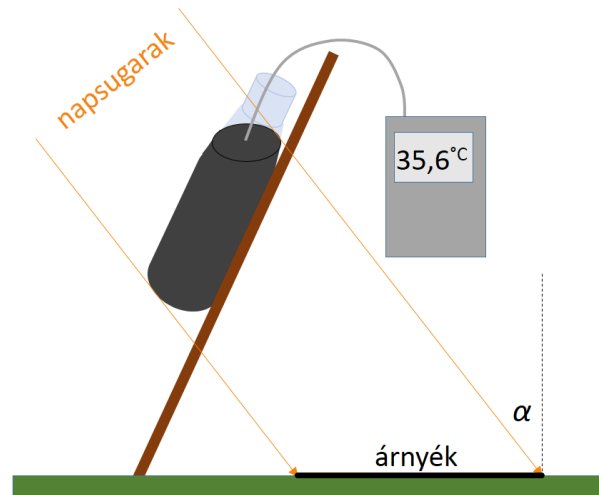
(Csaba György Gábor fordítása)

**4.2** Keress egy viszonylag hosszú, észak-dél irányú utcát. Lépd le a távolságot, és közben GPS vagy mobiltelefon-alkalmazás segítségével határozd meg a két végének földrajzi szélességét. Egy ismert távolság segítségével határozd meg a lépéseid hosszát. Az eredmény alapján adj becslést a Föld sugarára.

**4.3** A Földre (a magaslégrétegbe) érkező napsugárzás átlagos intenzitását napállandónak nevezzük. Ennek a feladatnak a célja a napállandó megmérése.

- (a)
- Kisméretű, vékony falú átlátszó műanyag flakont tölts meg ismert mennyiségű vízzel. (Megfelel például a mindenki által ismert egydecis mézes flakon.) Nem kell színültig tölteni, férjen bele a hőmérő is.
  - A vizet fekete tintával ferd meg. (A mézes flakon például egy töltőtollpatronnyi tintától elég fekete lesz.)
  - Ha a flakont átlátszó ragasztószalaggal egy pálcához rögzíted, a pálca földbe szúrásával könnyen elhelyezhető a kívánt helyen, a kívánt szögben.
  - Szükség van tizedfokokat kijelző hőmérőre: digitális multiméter, vagy kültéri szenzorral rendelkező háztartási hőmérő megfelel. (Ha nem szeretnéd tintás vízbe mártogatni, becsomagolhatod a szenzort háztartási fóliába.)
  - A flakont a bele helyezett hőmérő szenzorral először tartsd az árnyékban, amíg felveszi a környező levegő hőmérsékletét.

- Ezután tedd ki a napra, és fél percnként vagy percnként olvasd le a hőmérsékletét. 15–20 percig valószínűleg elég folytatni.
- A flakon sötét részének árnyékát a talajra terített papíron rajzold körül. Szükséged lesz az árnyék területére, ezt kockás papír vagy milliméterpapír használata megkönnyíti.
- Vagy mérd meg (pl. függőleges pálca árnyéka segítségével), vagy nézz utána, hogy méréseid idején mekkora volt a napsugarak beesési szöge.



(b) Ábrázold grafikonon a hőmérséklet-adatokat az idő függvényében. A grafikon meredeksége csökken: amikor a tintás víz már lényegesen melegebb a környezeténél, több hőt ad le a környezetnek. Ezért csak a grafikon kezdeti, egyenesnek látszó szakaszát használd: Illessz rá egyenest, és határozd meg a hőmérséklet  $\Delta T$  változását a megfelelő  $\Delta t$  időintervallum során.

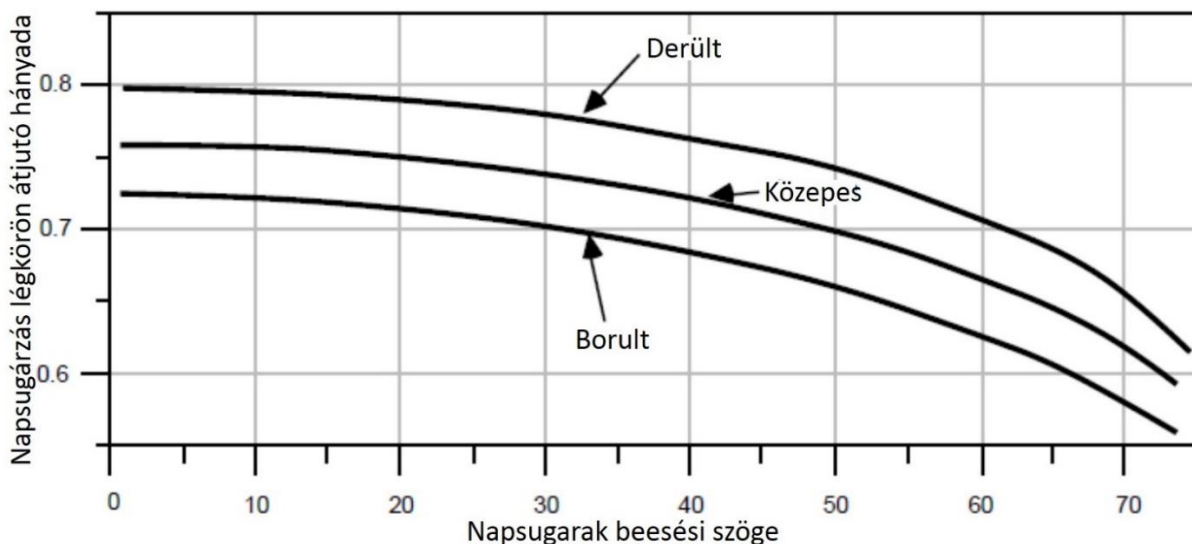
(c) Számítsd ki az egyenes szakasznak megfelelő hőmérsékletváltozáshoz szükséges hőmennyiséget.

(d) Számítsd ki az árnyék területét. Az árnyék területéből és a napsugarak beesési szögéből határozd meg a tintás vizet érő napsugárnyaláb keresztmetszetét.

(e) Feltételezve, hogy a tintás víz feketetestnek tekinthető, a kapott eredményekből határozd meg a flakont érő napsugárzás intenzitását.

(f) A kapott érték még nem a napállandó, hiszen a Földre megérkező napsugárzás nem mind jut át a légkörön. Az átjutó hányad függ attól, hogy a méréskor mennyire volt derült, tiszta, vagy éppen borult, párás idő. Ugyancsak függ attól, hogy milyen vastag levegőréteg volt a napsugarak útjában, vagyis a napsugarak beesési szögétől.

Az alábbi grafikon segítségével korrigálva a mérési eredményt, határozd meg a napállandó értékét.

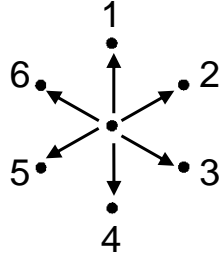


**4.4** Ez a gyakorlat azt modellezi, hogy a csillag belsejében felszabaduló sugárzási energia hogyan jut a csillag felszínére. A sugárzás nem tudja egyenes vonalban azonnal elhagyni a csillagot, mert a fotonok újra meg újra elnyelődnek és újra kisugárzódnak.

Ha egy részecskével kölcsönhatásba kerül, a részecske elnyeli a fotont, majd amikor újra kisugározza az elnyelt energiát, valamely irányba új foton indul útjára. Tekintheszük a jelenséget úgy, mintha ugyanaz a foton bolyongana véletlenszerűen mindaddig, míg eléri a csillag felszínét.

Egyszerű kétdimenziós modellként legyen a csillag az ábrákon (melléklet) látható hatszög, ahol a rácspontokban levő pontok jelentik a részecskéket, amelyeken a foton szóródhat. A két ábra egy kisebb, illetve egy nagyobb csillagnak felel meg.

Tegyük fel, hogy a foton a középső rácspontból indul. Haladási irányát dobókocka (vagy a zsebalkulátor véletlenszám-generátora) segítségével állapítsd meg:

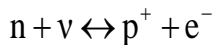
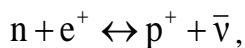


Nyomtasd ki a háromszögrácsot, és a dobások eredményének megfelelően rajzold be a szóródást jelképező törött vonalat. Mindaddig folytasd a dobásokat, amíg egy foton el nem éri a felszínt. Jegyezd fel, hány dobásra volt szükség.

Ismételd meg többször és/vagy az eredményt vedd össze másokéval.

**4.5** Az Univerzumban levő anyag tömegének sokkal nagyobb hányada hélium, mint amennyit a csillagokban végbemenő magfúzió létrehoz. A hélium túlnyomó része az ősrobbanást követő, úgynevezett elsődleges nukleoszintézis során keletkezett.

(a) Az Univerzum fejlődésének egy korai szakaszában a hőmérséklet még elég magas volt ahhoz, hogy a hőmozgás energiája ( $kT$ -vel becsülhetjük, ahol  $k$  a Boltzmann-állandó) jóval meghaladja az  $m_n c^2 - m_p c^2$  különbséget. Ekkor a protonok és neutronok a



reakciók által szabadon, egyenlő valószínűséggel alakultak egymásba, így a (közönséges) anyagnak körülbelül 50%-a proton, 50%-a neutron volt.

A proton tömege  $m_p = 1,67263 \cdot 10^{-27}$  kg,

a neutron tömege  $m_n = 1,67263 \cdot 10^{-27}$  kg.

Adj nagyságrendi becslést az ehhez szükséges hőmérsékletre.

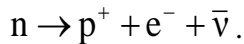
(b) Amikor az Univerzum életkora kb. 0,1 másodperc volt, a hőmozgás energiája  $m_n c^2 - m_p c^2$  körüli értékre csökkent, a reakciók már nem azonos valószínűséggel játszódtak le mindkét irányban, az egyensúlyi állapot egyre inkább a kisebb tömegű protonok felé tolódott el.

0,1 másodperckor a neutronok aránya már csak kb. 37% volt,

1 másodperccel az Ősrobbanás után pedig már csak kb. 18%.

Az első oszlop három ábrája (melléklet) a korai Univerzum három állapotát szemlélteti 100 db részecskével. A neutronoknak megfelelő köröket színezd be, a protonoknak megfelelőket hagyd fehérén.

(c) Amikor az Univerzum 1 másodperc korú volt, a hőmérséklet és a részecskesűrűség már annyira lecsökkent, hogy a fenti reakciók gyakorlatilag leálltak. Ettől kezdve játszott fontos szerepet a meglévő neutronok bomlása. A szabad neutron körülbelül 10 perces felezési idővel protonná bomlik:



Egy adott neutron mekkora valószínűséggel bomlik el egy percen belül?

(d) A második oszlop három ábrája ezt a korszakot szemlélteti.

Válassz ki egy neutron az 1 másodperckor még meglévők közül.

Számológéped véletlenszám-generátorával generálj egy 0 és 1 közötti számot.

Ha a véletlenszám kisebb, mint a (c) feladatban kapott valószínűség, akkor a neutronod protonná alakult (mostantól fehéren marad).

Ha nagyobb, akkor túlélte az első percet, színezd be ugyanezt a neutron az 1 perces Univerzum ábráján is. Ugyanígy járj el a többi neutron esetében.

Az első percet túlélő neutronokkal ismételd meg az eljárást, és az eredményt rögzítsd a 2 perces Univerzum ábráján. Hasonlóan állítsd elő a 3 perces Univerzumot.

(e) A 3 perces Univerzumban a hőmozgás energiája már az atommagok kötési energiája alá csökkent, a protonokból és neutronokból atommagok jöhettek létre. A héliummag igen nagy kötési energiája miatt szinte minden neutron héliummagba került.

A 3 perces Univerzum ábráján ezért két-két neutron és proton körberajzolásával jelenítsd meg a kialakuló héliummagokat. Ha maradt neutron, egy protonnal alkoss belőle deutériummagot.

Megjegyzés:

Az elsődleges, ősrobbanás utáni nukleoszintézis során keletkeztek kisebb arányban egyéb magok is, de ezek megjelenítésére egyszerű, számrészecskés modellünk nem alkalmas.

Modell-Univerzumodban az anyag tömegének hány százaléka lett hélium? (Ha 20 és 30% közötti értéket kapsz, az egyszerű modell összhangban van a korai Univerzumot leíró elméletekkel.)

**4.6** Ez a feladat az Univerzum tágulását illusztrálja kétdimenziós analógia segítségével.

(a)

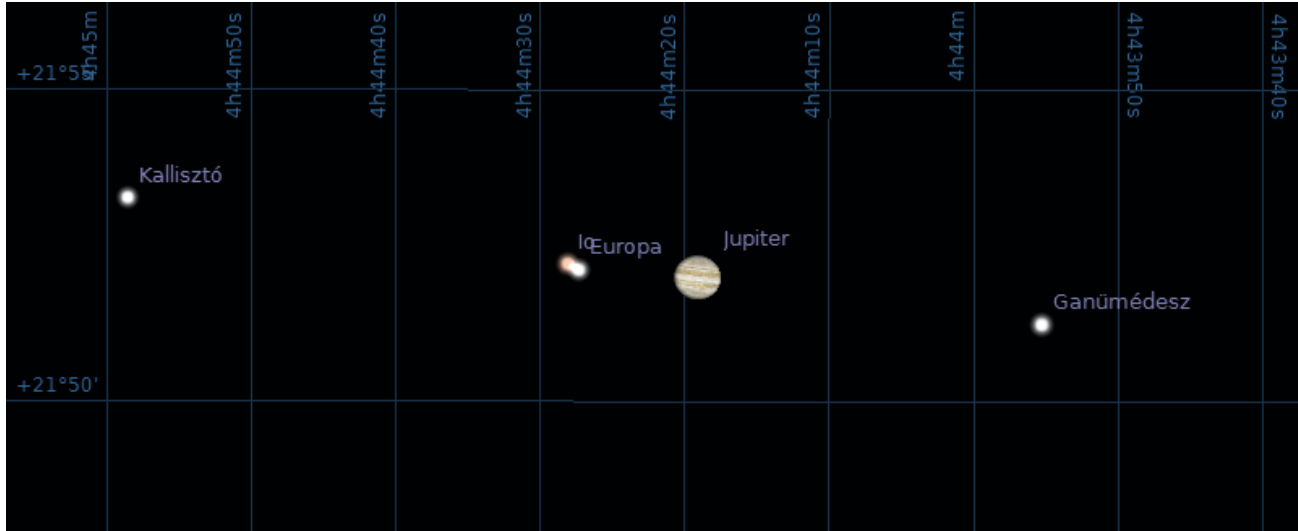
- Egy felfújatlan léggömbre alkoholos filctollal rajzolj néhány „galaxist”, és számozd meg őket. (Nem kellnek spirálkarok, elég pettyeket rajzolni.) Használj viszonylag sok tintát, hiszen felfújáskor halványodik a rajz. Válaszd ki az egyik galaxisodat, és mérd le a többi galaxisnak ettől a referencia-galaxistól való távolságát.
- Fújd fel a léggömböt, mérve a felfújáshoz szükséges időt. Kösd össze szorosan a léggömb száját. Készen van a Léggömb-Univerzum.
- Egy zsineg segítségével (a léggömb felülete mentén) újra mérd le mindegyik galaxis távolságát a referencia-galaxistól.
- Számítsd ki a távolságok változását. A változásokat az idővel elosztva kapsz a referenciagalaxistól való távolodásuk (átlagos) sebességét. Ábrázold a sebességet a (második, azaz a jelenkori) távolság függvényében, és határozd meg a Léggömb-Univerzum Hubble-állandóját.

(b) A számítások alapján mennyi a Léggömb-Univerzum becsült életkora? Hasonlítsd össze a felfújás idejével.

(c) Mi lenne az eredmény, ha másik galaxist választottál volna referencia gyanánt?

## Megoldások 4.

**4.1** Ha az „éjszaka első órájában” a sötétedés után egy órával végzett megfigyelésre utal, akkor az Io és az Europa takarásban voltak. (De az is lehet, hogy csak olyan közel látszottak egymáshoz, hogy Galilei távcsövének felbontóképessége nem volt elég a megkülönböztetésükhöz. Galilei adatközlése alapján nem lehet pontosan rekonstruálni a megfigyelés időpontját.



**4.2** Budapesten például a budai Duna-part Margit híd és Lánchíd közti szakasza kb. észak-déli irányú.

A parti sétányon a Margit híd budai hídfőjének tövében  $47,5145^\circ$  szélességet, a Lánchíd tövében pedig  $47,4984^\circ$ -ot mértünk. A különbség a körívhez tartozó középponti szög:

$$(0,0161 \pm 0,0005)^\circ = 0,0161^\circ \pm 3,1\% = 2,81 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \pm 3,1\%.$$

A távolságot

$2800 \pm 100$  lépés =  $2800$  lépés  $\pm 3,6\%$  hosszúnak találtuk, lépéseink hossza pedig

$$(62 \pm 2) \text{ cm} = 0,62 \text{ m} \pm 3,2\%.$$

A távolság, vagyis a körív hossza ekkor

$$2800 \cdot 0,63 = 1740 \pm 6,8\% \\ (= 1740 \text{ m} \pm 120 \text{ m}).$$

Innen a kör sugara

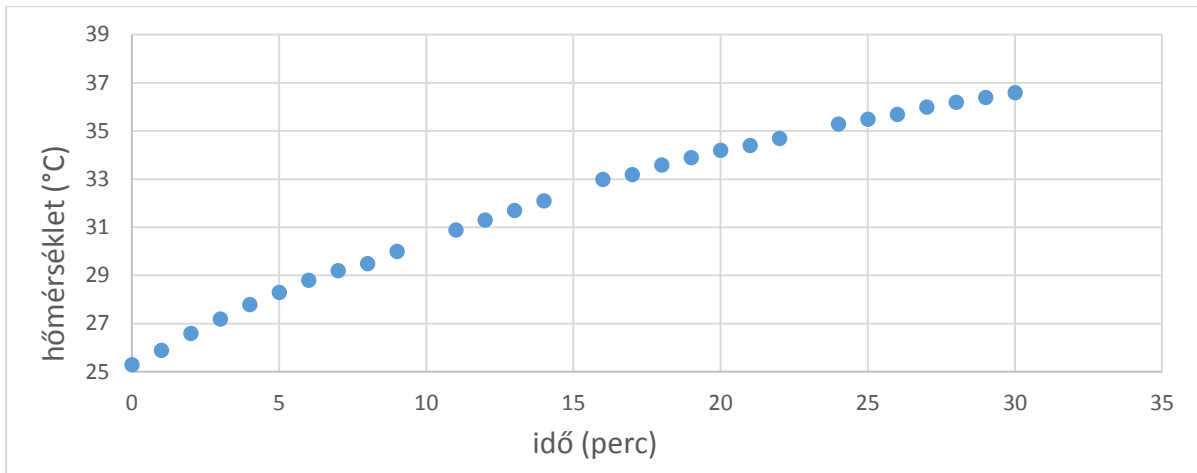
$$\frac{1740}{2,81 \cdot 10^{-4}} = 6190 \text{ km} \pm 10\%$$

A Föld sugarára kapott becslésünk így

$$6200 \text{ km} \pm 600 \text{ km}.$$

**4.3** (a) A táblázat egy mézes flakonba töltött 80 g tömegű víz melegedését mutatja augusztus 15-én déli 1 óra körül.

$t$ (perc)	$T$ ( $^\circ\text{C}$ )
0	25,3
1	25,9
2	26,6
3	27,2
4	27,8
5	28,3
6	28,8
7	29,2
8	29,5
9	30
11	30,9
12	31,3
13	31,7
14	32,1
16	33
17	33,2
18	33,6
19	33,9
20	34,2
21	34,4
22	34,7
24	35,3
25	35,5
26	35,7
27	36
28	36,2
29	36,4
30	36,6



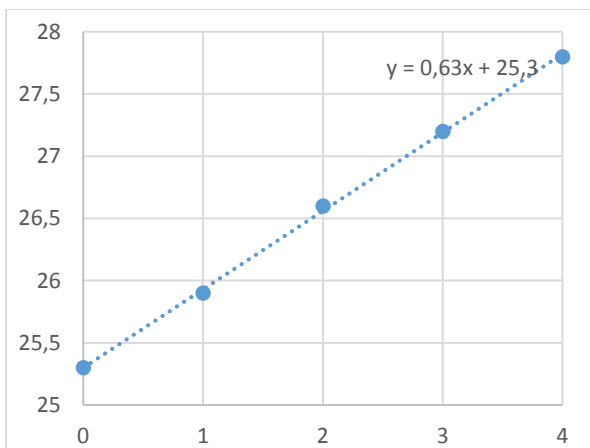
(b) A grafikon első  $\Delta t = 4$  perces szakasza elég egyenes, a hőmérsékletváltozás  $\Delta T \approx 2,5^\circ\text{C}$ .

(c)  $Q = cm\Delta T = 4190 \cdot 0,080 \cdot 2,5 = 838\text{J}$ .

(d) A körülrajzolt árnyék területe kockás papíron négyzeteket számolva  $38,5\text{ cm}^2$  volt. Csillagtérképről leolvassa A napsugarak hajlásszöge  $65^\circ$ , a beesési szög tehát  $\alpha = 25^\circ$ .

A sugárnyaláb keresztmetszete

$$A = 38,5 \cdot \cos 25^\circ = 34,4\text{ cm}^2.$$



(e)  $cm\Delta T = I \cdot A \cdot \Delta t$

$$I = \frac{838}{34,4 \cdot 10^{-4} \cdot 240} = 1015 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

(f) A mérés idején az ég inkább derült volt, de kissé párás. A megadott grafikon alapján az átjutó hányadot 78%-nak becsülhetjük.

A napállandó kapott értéke

$$\frac{1015}{0,78} = (1300 \pm 100) \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

A hibát elsősorban a grafikon kezdeti meredekségének pontatlansága, valamint a tintás víz abszolút feketének tekintése okozza.

**4.4** A szükséges dobások száma a rétegek számával gyorsan növekszik.

Megjegyzés:

A Nap esetében például millió év nagyságrendű az az idő, amely ahhoz kell, hogy a közepén felszabaduló energia elérje a felszínt. (A Nap természetesen háromdimenziós, és a folyamat is sokkal bonyolultabb ennél a modellnél. Többek között azért, mert nemcsak a méret számít, hanem például a sűrűség és a hőmérséklet is, illetve azért, mert az energia kifelé áramlása nemcsak sugárzás útján történik: a Nap konvekciós zónájában a magasabb hőmérsékletű gázok felemelkedése és az alacsonyabb hőmérsékletűek lesüllyedése a fő mechanizmus.)

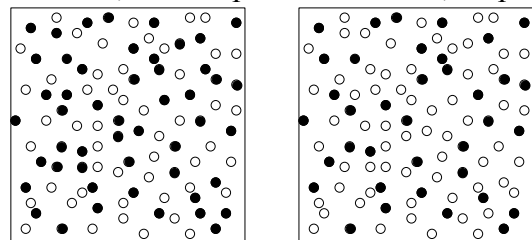
**4.5** A hőmozgás során összeütköző részecskék ütközési energiája

$$\begin{aligned} E &\approx kT = m_n c^2 - m_p c^2 = \\ &= (1,67493 - 1,67263) \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = \\ &= 2 \cdot 10^{-13} \text{ J} \\ T &= \frac{2 \cdot 10^{-13}}{1,38 \cdot 10^{-23}} = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ K} \end{aligned}$$

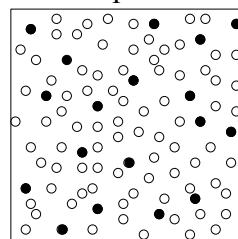
$T = 10^{11}$  K hőmérsékleten még egyensúly volt.

(b) 0,01 másodperc: 50 neutron, 50 proton

0,1 másodperc: 37 neutron, 63 proton



1 másodperc: 18 neutron, 82 proton

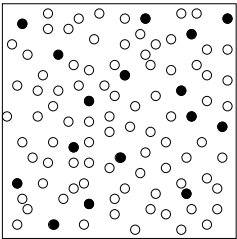


(c) 10 perc múlva a megmaradó neutronok aránya 50%, így 1 perc során  $0,5^{1/10} = 93\%$  marad meg, vagyis 7% bomlik el. Ez egyenértékű azzal, hogy egy adott neutron 0,07 valószínűséggel bomlik el.

(d) A 18 db véletlenszám például:

0,4538	0,8039	0,1593
0,9757	0,4912	0,0229
0,3399	0,6103	0,1113
0,2643	0,7739	0,4721
0,9454	0,2440	0,4694
0,0977	0,0008	0,5283

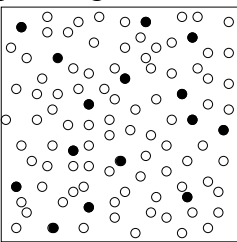
A hatodik és a tizenhetedik szám kisebb 0,07-nél, az első perc végén 16 neutronunk maradt.



16 db újabb véletlenszám:

0,8040	0,0139	0,7914
0,1031	0,8042	0,1872
0,3738	0,1871	0,4266
0,4416	0,6985	0,6963
0,9275	0,3509	0,4525
0,5128		

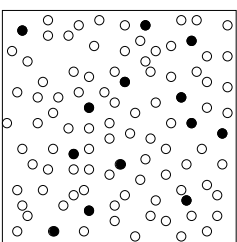
A második neutron elbomlott, a második perc végén 15 neutronunk maradt.



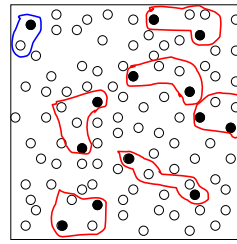
Újabb 15 db véletlenszám:

0,4989	0,7779	0,3046
0,0424	0,7114	0,7534
0,1555	0,4160	0,0774
0,2302	0,6982	0,0630
0,5933	0,8583	0,8344

A negyedik és a tizenkettedik elbomlott, a harmadik perc végére 13 neutronunk maradt.



A száz kb. egyenlő tömegű részecskéből 6-szor 4 db alkot héliummagot, vagyis a hélium tömegaránya 24%.



**4.6** (a) A táblázat mérési adatokat tartalmaz, a felfújás ideje 1 perc volt.

A grafikon egyenes, meredeksége

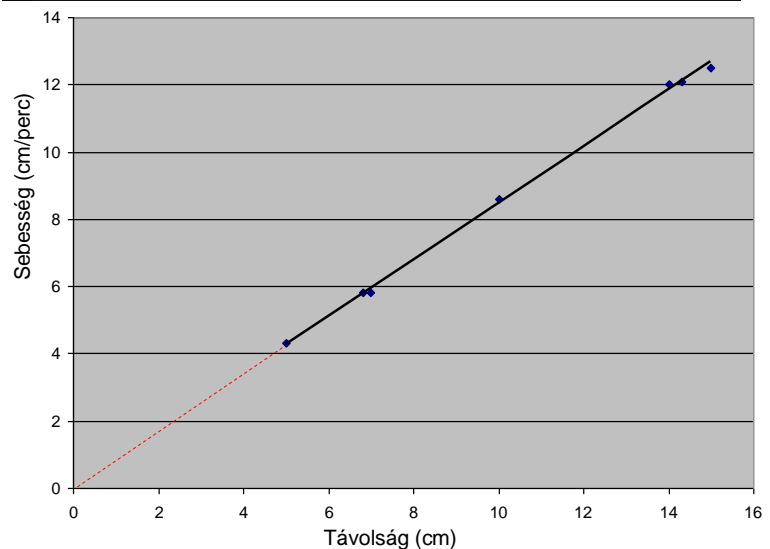
$$H = 0,84 \frac{\text{cm/perc}}{\text{cm}}$$

(b) A becsült életkor  $\frac{1}{H} = 1,2\text{perc}$ .

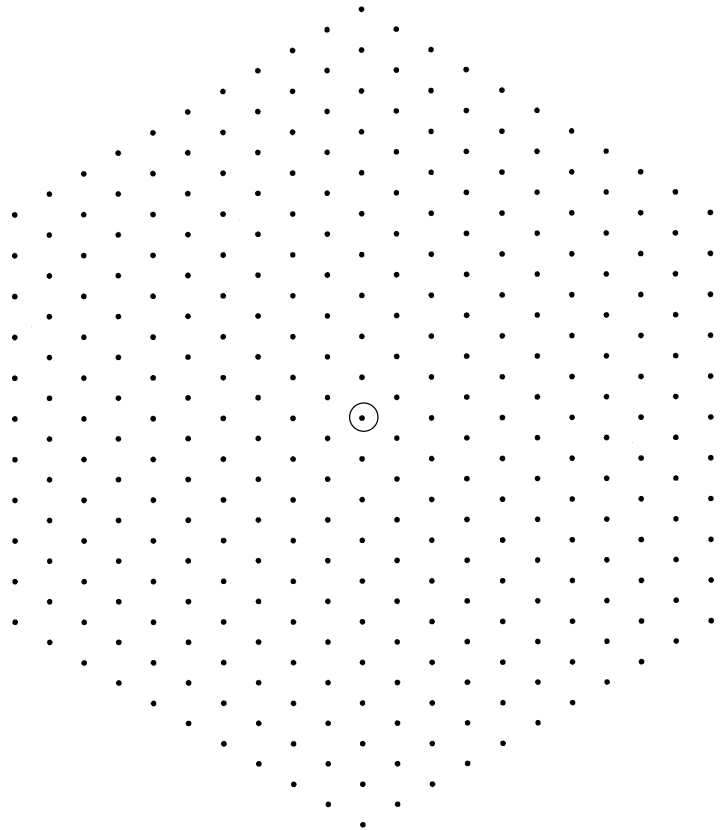
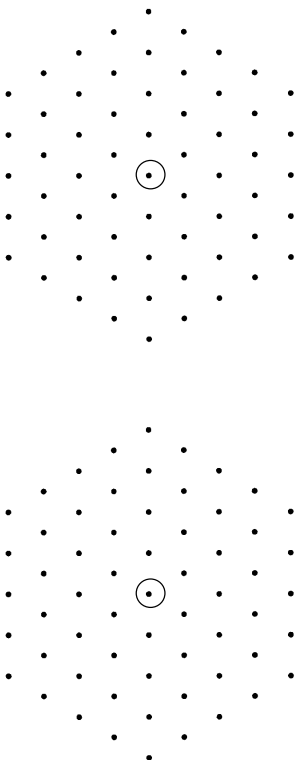
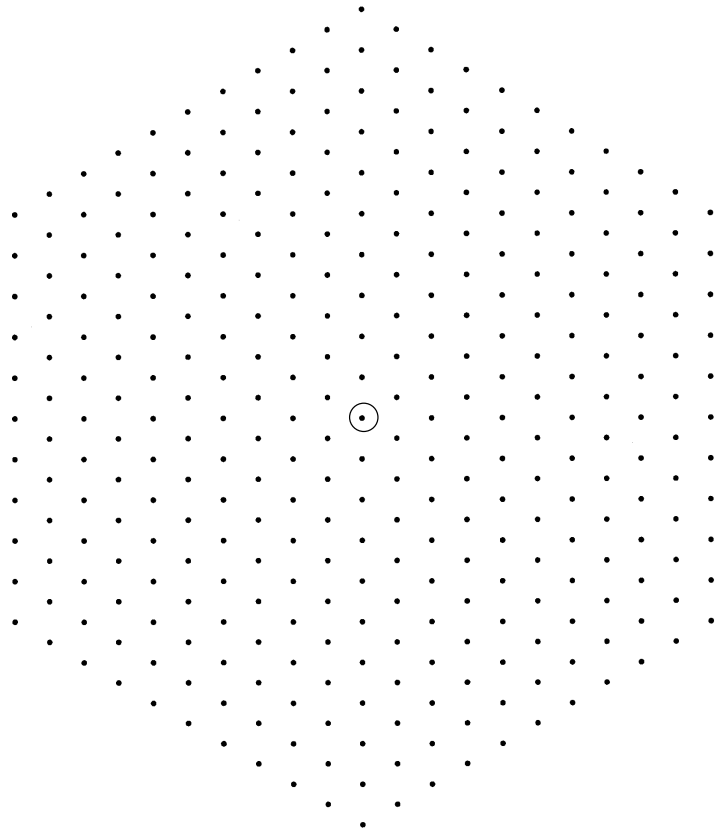
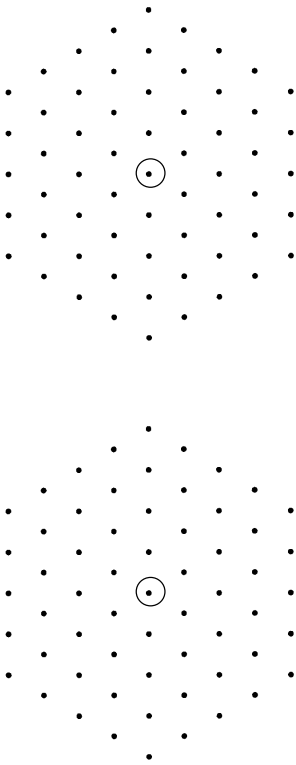
Az eredmény nem azonos a felfújás idejével, hiszen egyenes tágulást feltételez, másrészt a kiindulási állapotban a léggömb már véges méretű volt.

(c) Ugyanazt a Hubble-állandót kapjuk.

A galaxis száma	Kezdeti távolság a 0 jelű galaxistól (cm)	Végso távolság (cm)	Sebesség (cm/perc)
0	0	0	0
1	1,0	6,8	5,8
2	2,2	14,3	12,1
3	0,7	5,0	4,3
4	1,4	10	8,6
5	2,0	14	12
6	1,2	7,0	5,8
7	2,5	15	12,5

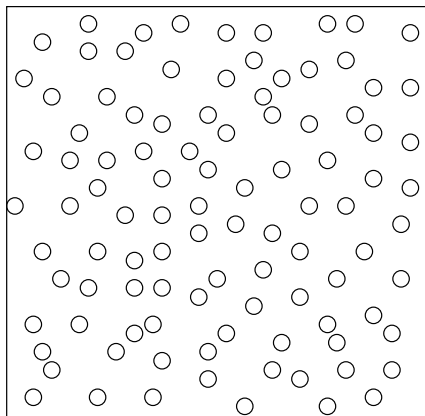


## MELLÉKLET A 4.4 FELADATHOZ

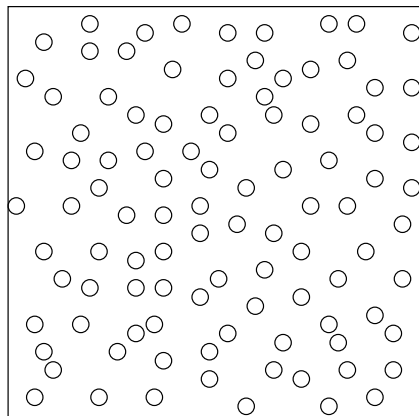


## MELLÉKLET A 4.5 FELADATHOZ

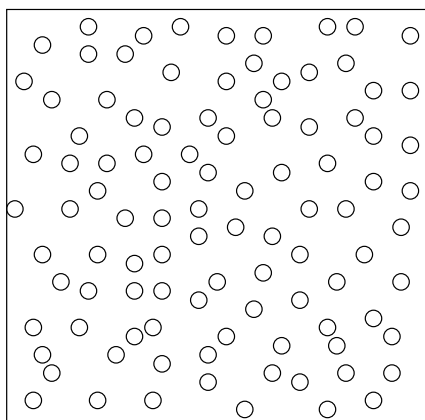
0,01 másodperc



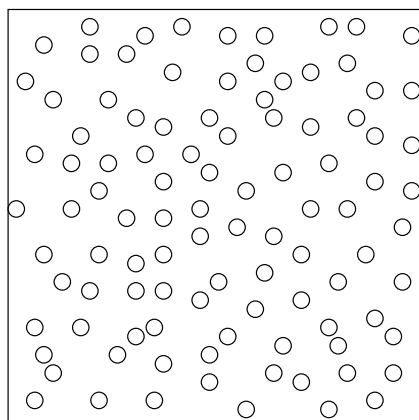
1 perc



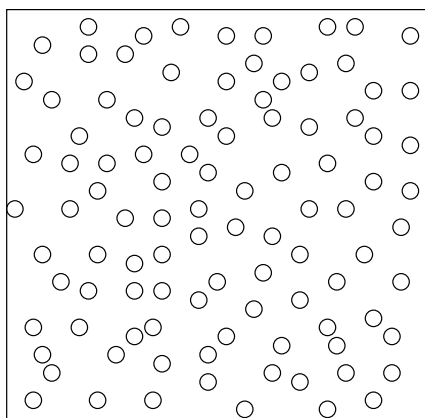
0,1 másodperc



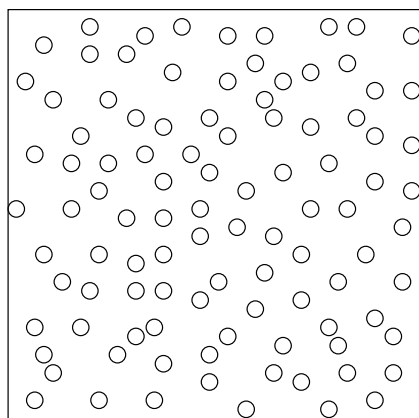
2 perc



1 másodperc



3 perc



## Irodalom

[1] N. Sanjay Rebello, L. Cui, A. G. Bennett, D. A. Zollman, D. J. Ozimek: Transfer of Learning in Problem Solving in the Context of Mathematics and Physics, in *Learning to solve complex scientific problems*, Lawrence Erlbaum Associates, 2007., pp 223-246.

[2] X. Wu, T. Zu, E. Agra, N. Sanjay Rebello: Effect of Problem Solutions on Students' Reasoning Patterns on Conceptual Physics Problems, in Engelhardt, Churukian, Jones (szerk.): *Physics Education Research Conference Proceedings*, American Association of Physics Teachers, 2014., pp 279-282.

[3] W. J. Gerace: Problem Solving and Conceptual Understanding, *Physics Education Research Conference Proceedings*, American Association of Physics Teachers, 2001., pp 1-4.

W. J. Kaufmann: *Universe*, W. H. Freeman and Co., New York, 1988.

H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner (Szerk.): *Fundamental Astronomy*, Springer, Berlin Heidelberg, 2007.

M. Seeds, J. Holzinger: *Student Observation Guide with Laboratory Exercises*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.

T. L. Smith, M. D. Reynolds, J. S. Huebner: *Basic Astronomy Labs*, University of North Florida, 1996.

*ASTR 1010 Laboratory Manual, Introduction to Astronomy*, Dept. of Astrophysical and Planetary Sciences, University of Colorado, Boulder, 2016.

Galileo Galilei: *Sidereus Nuncius*, (magyar fordítás, Csaba György Gábor), Meteor Csillagászati Évkönyv, 2009.

Horváth Zs.: Exobolygók minden szinten, *Fizikai Szemle* 2017/3, pp. 93-99.

Hudoba Gy.: *A diákok fizika iránti érdeklődésének felkeltése űrszonda modell építés és egyéb motiváló módszerek és programok segítségével*, doktori értekezés, ELTE TTK, 2016.

Bécsy B., Dálya G.: *A Nemzetközi Csillagászati és Asztrófizikai Diákolimpia Szakkör feladatai*: <http://becsybence.web.elte.hu>

<http://www.stellarium.org>

<http://astronomie-smartsmur.over-blog.com>

<http://www.eso.org>

<https://nssdc.gsfc.nasa.gov>

<http://spacemath.gsfc.nasa.gov>

<https://sites.google.com/a/uw.edu/introductory-astronomy-clearinghouse/assignments/labs-exercises>

[http://sbo.colorado.edu/SBO\\_OLD\\_SITE/sbo/manuals/apsmanuals/suntemp.pdf](http://sbo.colorado.edu/SBO_OLD_SITE/sbo/manuals/apsmanuals/suntemp.pdf)

<http://astro.wsu.edu/labs/Discovery-of-Extrasolar-Planets.pdf>