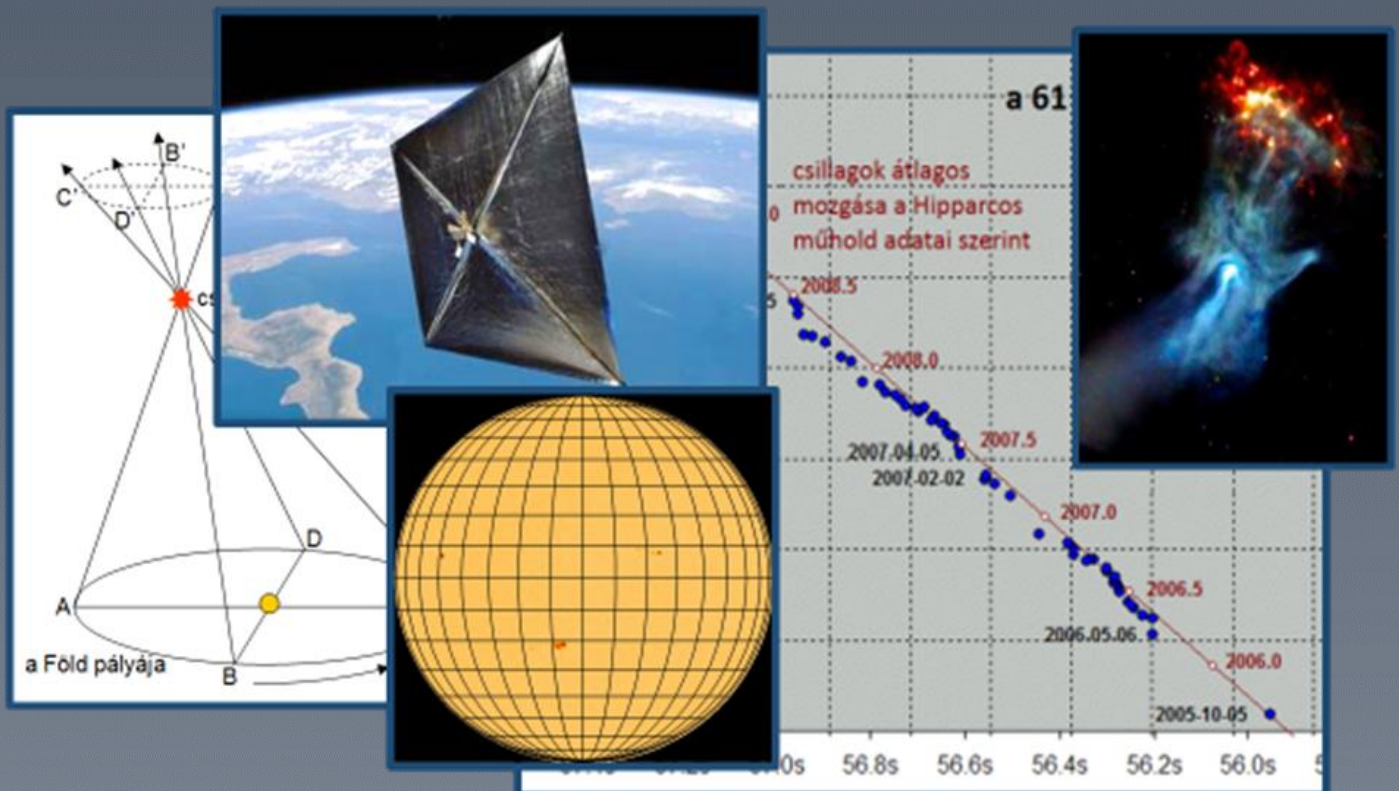


Gróf Andrea

ŰRFIZIKA

Válogatott nem hagyományos feladatok
a csillagászat és űrkutatás
témaköréből



GRÓF ANDREA

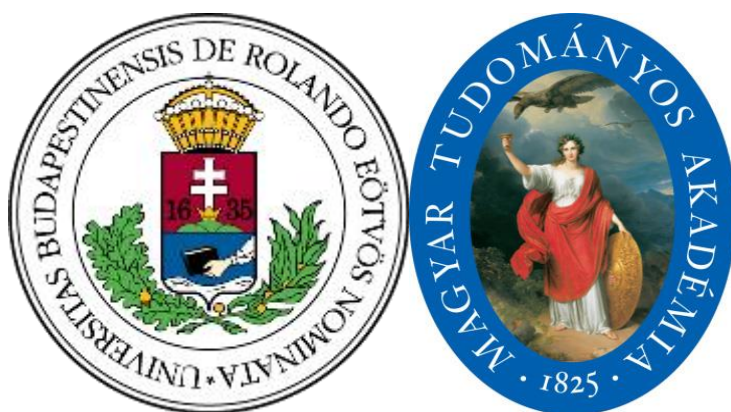
ŰRFIZIKA

**Válogatott nemhagyományos feladatok
a csillagászat és űrkutatás
témaköréből**

ELTE FIZIKA DOKTORI ISKOLA BUDAPEST

2021

A kiadvány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia
Tantárgypedagógiai Kutatási Programja támogatta



Szakmai lektor: Horváth Zsuzsa

Didaktikai lektor: Szeidemann Ákos

© Gróf Andrea

Kiadja az ELTE Fizika Doktori Iskola

Felelős Kiadó: Dr. Gubicza Jenő

Budapest 2021

Összeállította: Gróf Andrea

Szakmai lektor: Horváth Zsuzsa

Didaktikai lektor: Szeidemann Ákos

A feladatgyűjtemény elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programja támogatta.
2018.

Tartalom

Bevezetés	3
1. Szögmérés az égbolton	
MÉRET MEGÁLLAPÍTÁSA A TÁVOLSÁG ISMERETÉBEN	5
A NAP- ÉS A HOLDKORONG SZÖGMÉRETE	7
KERINGÉS ÉS TENGELYFORGÁS	9
Megoldások 1.	13
2. Régi mérések modern adatokkal és technikával	
A HOLD HEGYEINEK MAGASSÁGA: GALILEI MÉRÉSEI	16
A MERKÚR PÁLYÁJA: KEPLER MÓDSZERE	17
FÉNYSEBESSÉG: RÖMER MÉRÉSE	19
A CSILLAGOK PARALLAXISA: BESSEL MÉRÉSE	22
Megoldások 2.	26
3. Függvénykapcsolatok vizsgálata	
LINEÁRIS KÖZELÍTÉS	30
NEMLINEÁRIS ÖSSZEFÜGGÉSEK	32
Megoldások 3.	34
4. A fizika különböző fejezeteiben tanultak összekapcsolása	
BEVEZETŐ FELADATOK	37
GÁZOK GRAVITÁCIÓS TÉRBEN	38
SUGÁRNYOMÁS	40
Megoldások 4.	42
5. A hőmérsékleti sugárzás törvényeinek alkalmazása	
WIEN-FÉLE ELTOLÓDÁSI TÖRVÉNY	46
LUMINOZITÁS ÉS INTENZITÁS	47
STEFAN-BOLTZMANN-TÖRVÉNY	48
ALBEDÓ, BOLYGÓK HŐMÉRSÉKLETÉNEK BECSLÉSE	50
Megoldások 5.	51
Irodalom	54

Bevezetés

2017-ben *Exobolygók és űreszközök. Válogatott középiskolás feladatok a csillagászat és űrkutatás modern eredményihez* címmel összeállítottunk egy feladatgyűjteményt, mellyel annak lehetőségeit kutattuk, hogy miként teremthető meg a csillagászat modern területeinek középiskolai interpretációja. Ebben bemutattuk a távoli csillagrendszerek bolygóinak világát, a felfedezésükhöz alkalmazott módszereket és a lakhatóság kérdését, valamint foglalkoztunk a Naprendszer bejáró egyre több űrszonda, illetve az űrtávcsövek eredményeivel, csakúgy, mint az egyre inkább előtérbe kerülő aszteroida-kutatással.

A csillagászat és űrkutatás terén azonban nemcsak a tudomány új eredményei kínálnak a tanulóknak problémamegoldó gondolkodását fejlesztő és szemléletformáló erejű, újszerű, nem hagyományos feladatokat. A régóta rendelkezésre álló tudás kapcsán is fontos rácsodálkozni arra, hogy a technikának az egyes korszakokban elért fejlettségi fokán milyen logikai következtetések útján juthattak el az akkor még új ismeretekhez. Második feladatgyűjteményünk feladatait e megfontolást követve válogattuk. Ily módon a technika fejlődését is érzékeltetjük néhány feladaton keresztül. Az első válogatáshoz hasonlóan figyelmet fordítottunk arra, hogy a feladatok lehetőséget nyújtsanak valódi adatok feldolgozására, képek, grafikonok értelmezésére és egyéb tanulói tevékenységre.

A fizikatanításban hagyományosan megtalálhatóak az égitestek tulajdonságaival és mozgásaival foglalkozó feladatok. Nem szokás azonban kitérni arra, hogy hogyan tehetünk szert a feladatban megadott, akár kvalitatív, akár kvantitatív információkra. Pedig igencsak elgondolkozásra érdemes már az is, hogy az égbolton közvetlenül mérni csak szögtávolságot tudunk, abszolút távolságokat vagy mélységeket nem. Egy feladatcsokor ezért a szögmérésekből levonható következtetésekre épül. Szerepelnek bennük az űrtávcső-készítette színpompás felvételek távoli csillagködökről készített, és a Merkúr (nemrégiben, 2016-ban is megfigyelhető) napkorong előtti átvonulásáról, szerepel saját készítésű lyukkamerával végezhető tanulói mérés, valamint a kép rögzítésének lehetőségei. A Nemzetközi Űrállomás, illetve a napfoltok mozgása kapcsán pedig felhívjuk a figyelmet arra, hogy a ténylegesen megfigyelt mozgás körmozgások összetételeként áll elő.

Egy további fejezetben történelmi méréseket dolgoztunk fel a modern technika adta lehetőségek felhasználásával. Modern műszerek által szolgáltatott, mindössze néhány éves adatokkal reprodukáljuk, hogy hogyan térképezte fel Kepler a Merkúr pályáját, és hogyan mérte meg Rømer a fény sebességét. A mai képrögzítési technikával, de Galilei módszerét követve mérjük meg a Hold hegyeinek magasságát, és több feladat során bemutatjuk, hogyan juthatott el Bessel a csillagok parallaxisának kimutatásához, amely végre közvetlenül igazolta a Föld Nap körüli keringését. A feladatok során érzékeltetjük, hogy ez nemcsak a megfigyelés (Bradley által adott) értelmezése terén számított bravúros eredménynek (ennek érdekében új fogalmakkal is megismerkedünk), hanem technikailag is. 2005. és 2009. között ugyanis Bessel távcsövéhez nagyon hasonló műszerrel megismételték Bessel megfigyeléseit, az adatok rögzítéséhez és feldolgozásához azonban már számítógépet használtak.

A fizikatanításban szintén hagyományosan fontos szerepet játszanak a mennyiségek között fennálló függvénykapcsolatok. A legtöbb fizikafeladatban azonban a kapcsolat jellege eleve adott. A csillagászati mérések adatai is lehetőséget nyújtanak azonban arra, hogy egyszerű modell felállításához lineáris közelítést keressünk valójában igen bonyolult összefüggésekhez, illetve foglalkozzunk a megfigyelt nemlineáris összefüggés mögött rejlő fizikai és geometriai háttérrel, illetve a megállapított összefüggés érvényességi korlátaival.

Nem szokványos feladatok nyerhetők úgy is, ha egy feladaton belül ötvözzük a fizikatanítás különböző fejezeteinek keretei között szerzett ismereteket. Több feladatban szerepelnek együtt a gázokkal kapcsolatos mechanikai és hőtani ismeretek, melyekből nemcsak a bolygók légkörének

összetételére következtetünk, de nagyságrendi becslést adunk a Nap belsejének hőmérsékletére is. A fotonok lendületváltozása kapcsán pedig eljutunk a sugárnyomás segítségével gyorsított üreszközök jelenleg is intenzíven kutatott lehetőségéhez.

Végül az utolsó feladatcsokor arra segít rácsodálkozni, hogy milyen sokat tudunk a csillagokról (hőmérséklet, tömeg, anyagi összetétel, stb.) annak ellenére, hogy legtöbbjük csak részletek nélküli fénylő pont az égen, így minden ismeretünk csakis a csillagról érkező fény spektrális eloszlásának vizsgálatából adódik. E feladatok elméleti háttere valamelyest túlterjed a hagyományos középiskolás fizikán, ugyanis szükség van hozzájuk a feketetest-sugárzás törvényszerűségeinek (Wien eltolódási törvénye, Stefan–Boltzmann-törvény) ismeretére is. Mivel a középiskolai tanárok képzésében ugyanakkor szerepelnek ezek a törvények, igen csekély többletmunkát igényel, hogy a csillagok tulajdonságain túl a bolygók felszíni hőmérsékletének és a légköri üvegházhatás szerepének vizsgálatáig is eljussanak a tanulók.

1. Szögmérés az égbolton

MÉRET MEGÁLLAPÍTÁSA A TÁVOLSÁG ISMERETÉBEN

1.1 A képen látható, kézre emlékeztető (Isten Kezének is nevezett) röntgensugárzó köd egy mindössze 20 km átmérőjű, nagy sűrűségű objektum keletkezésével együtt jött létre. A Chandra űrtávcső által készített kép közepén, a hüvelykujj mögött található a PSR B1509-58 jelű fiatal pulzár, gyorsan forgó neutroncsillag, amely rengeteg energiát bocsát ki magából.

A csillagászok szerint a pulzár és a köd kb. 1700 évesek, és kb. 17 000 fényév távolságra vannak tőlünk. A jobbra felfelé kinyúló, ujjakra emlékeztető struktúrák nagyenergiájú részecskeáramra utalnak, vélhetően energiát juttatnak a szomszédos RCW 89 gázködbe, és a köd anyagát erős sugárzásra készítetik a röntgen-tartományban (ezek a kép jobb felső részén látható vörös és narancsszínű csomók).

(a) A kép szélessége 19 szögperc. Mennyi a szélessége fényévben?

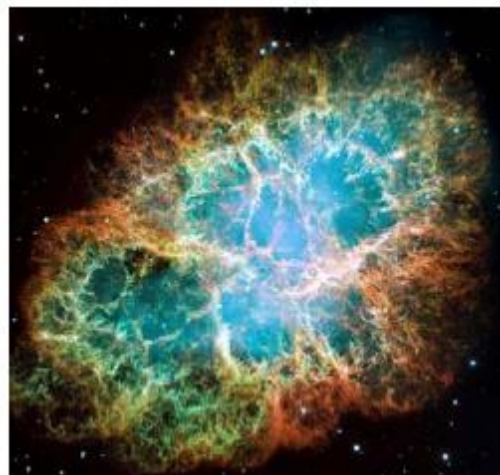
(b) Hány fényév a távolság a „hüvelykujjban” levő fényfolt, vagyis a pulzár, illetve az RCW 89 gyűrűszerűen sorakozó fénycsomói között?

(c) Ha a csillagközi gáz sebessége 10 000 km/s, mennyi idő alatt érte el anyagáram az RCW 89-et?



<http://spacemath.gsfc.nasa.gov>

1.2 (a) A kép a Hubble-űrtávcső felvétele (2005), a Rák-ködöt ábrázolja. A képen 1 mm 0,2 fényévnek felel meg. A ködöt az 1054-ben megfigyelt szupernóva-robbanás hozta létre, a gázfelhő azóta is tágul. Hány m/s a tágulás átlagos sebessége?



<http://spacemath.gsfc.nasa.gov>

A pulzár szupernóva-robbanás után visszamaradó gyorsan forgó neutroncsillag, amely forgásával egyező frekvenciával rádiósugárzást bocsát ki. A Rák csillagképben található Rák-pulzár az 1054-ben észlelt szupernóva-robbanás maradványa. A rádiósugárzás periódusideje jelenleg 0,033 s, de pontos mérések szerint folyamatosan növekszik.

A növekedés mértéke évenként $1,26 \cdot 10^{-5}$ s.

(b) Mekkora a pulzár szöggyorsulása?

(c) Ha feltételezzük, hogy a szöggyorsulás állandó, hány év múlva szűnik meg a forgás?

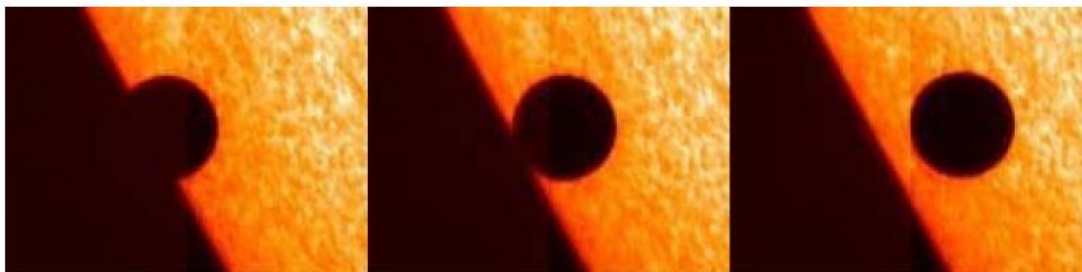
(d) Ha feltételezzük, hogy a szöggyorsulás állandó, mennyi volt a periódusidő a pulzár születésekor?

1. Szögmérés az égbolton

A NAP- ÉS A HOLDKORONG SZÖGMÉRETE

1.3 Évtizedenként egy-két alkalommal a Földről nézve a Merkúr átvonul a napkorong előtt. (2016. május 9-én is ilyen esemény történt.)

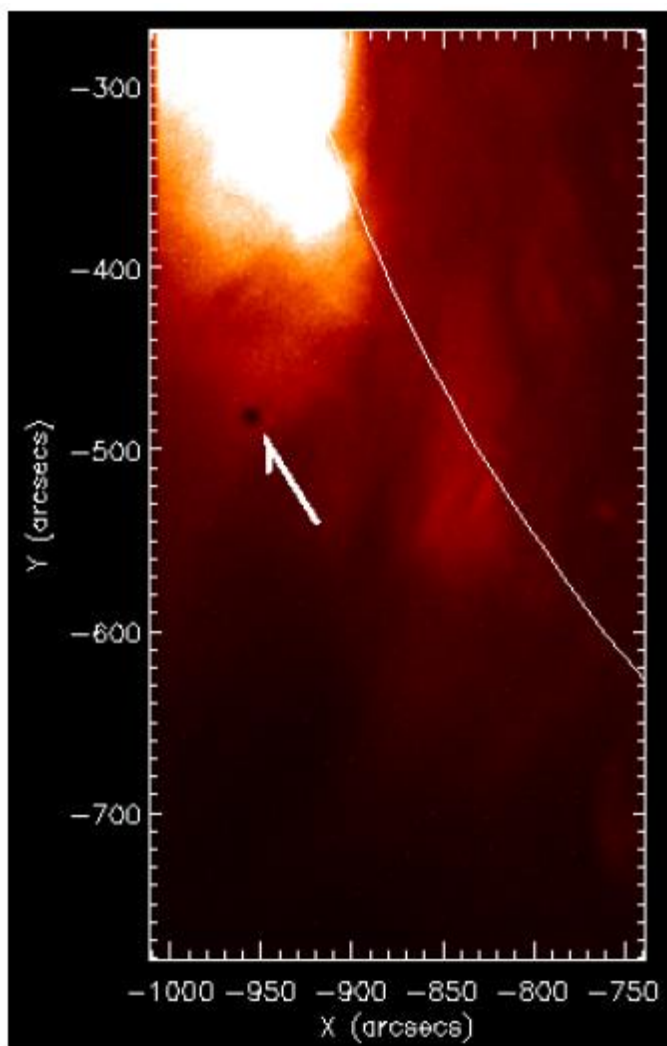
(a) Miért ilyen ritkán figyelhetünk meg átvonulást?



Solar Optical Telescope (SOT) <http://spacemath.gsfc.nasa.gov>

(b) Az alábbi képet a Hinode műhold készítette a 2006. november 8-án megfigyelt átvonuláskor. A fehér vonal a napkorong széle, a nyíl mutatja a napkorona előtt haladó Merkúrt.

Az átvonuláskor a Földről nézve a Merkúr szögátmérője 10 szögmásodperc volt. Mekkora volt a Nap szögátmérője a Hinode EIS felvétele alapján?



EUV Imaging Spectrometer (EIS). <http://spacemath.gsfc.nasa.gov>

1.4 Készíts lyukkamerát egy legalább fél méter hosszú csőből: (Több darabból is összeállítható, használhatod például a háztartásban fellelhető papírhengereket.) A cső egyik végére sötét színű ragasztószalaggal erősíts milliméterpapírból, a másik végére pedig átlátszatlan kartonpapírból kivágott korongot. A kartonkorong közepét tüvel szúrd át.

A lyukat irányítsd a Nap felé, hogy a milliméterpapír-ernyőn megjelenjen a napkorong képe. (Ha remeg a kezed, támaszd meg a csövet egy szék hátán.) Szükség lehet arra, hogy régi fényképezők módjára valamilyen sötét ruhadarabbal letakard a fejedet és a cső feléd néző milliméterpapíros végét, így nem vakít el a közvetlen napfény.

A milliméterpapírról olvasd le a napkorong képének átmérőjét. Mérd le a cső hosszát, és határozd meg a Nap szögátmérőjét (azaz, hogy mekkora szögben látszik a Nap a Földről).

1.5 A Hold szögátmérője $29'22''$ és $33'31''$ között változik. Mekkora lehet a távcsövünk objektívjének fókusz távolsága, ha azt szeretnénk, hogy a Hold képe minden esetben ráférjen egy szokványos 22×16 mm-es CCD-chipre?

1.6 A napfoltok távcsöves megfigyeléséhez a távcső által alkotott képet kivetítjük az okulár mögé elhelyezett ernyőre. Objektívünk fókusz távolsága 120 cm, az okulárunké 2,0 cm. Az okulártól milyen távolságra kell elhelyeznünk az ernyőt, hogy 16 cm átmérőjű napképet kapjunk?

1. Szögmérés az égbolton

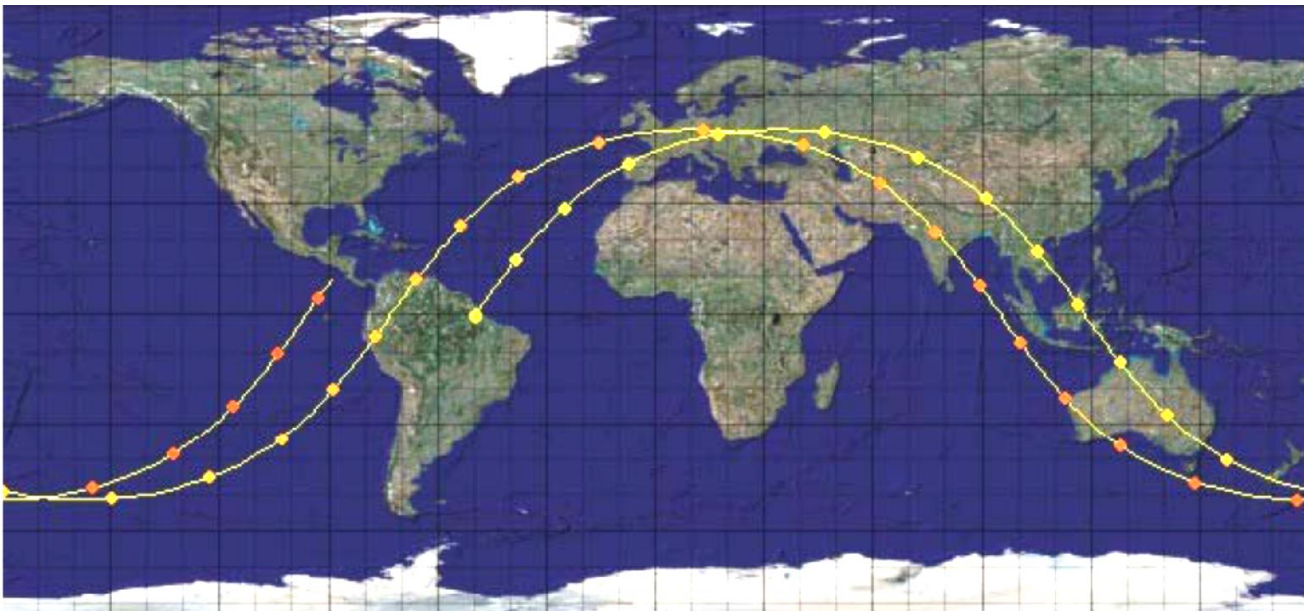
KERINGÉS ÉS TENGELYFORGÁS

1.7 A Nemzetközi Űrállomás (ISS) Föld körüli keringési periódusa 90 perc. Míg az ISS a Föld körül kering, a Föld körbefordul alatta. Ez azt jelenti, hogy az ISS földrajzi hosszúsága folyamatosan változik. Az alsó ábra az ISS-nek a földfelszínre vetített helyzetét mutatja két keringés időtartama alatt 5 perces időközönként. Az ábra közepén vízszintesen húzódik az Egyenlítő, a négyzetek oldala 10 fok.



<http://spacemath.gsfc.nasa.gov>

- (a) Az ISS keringési periódusának ideje alatt mekkora szöggel fordul el alatta a Föld?
 (b) Egy 24 órás földi nap ideje alatt hány napkeltét és napnyugtát figyelhetnek meg az űrállomáson tartózkodók?



<http://spacemath.gsfc.nasa.gov>

1.8 A Discoverer II űrszonda a földfelszín felett körülbelül $6,67 \cdot 10^3$ m magasságban keringett, közel kör alakú pályán úgy, hogy mindkét pólus felett elhaladt. Ha egyszer éppen Budapest felett repült át Európán, akkor hol repült át a következő alkalommal?

1.9 (a) Mekkora a Merkúr keringési és tengelyforgási periódusának aránya?

Megjegyzés:

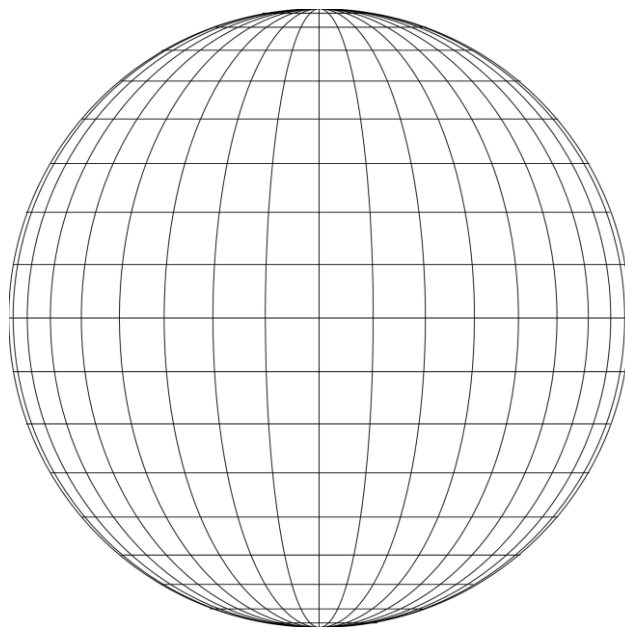
Kis mérete (látószöge maximum 13 szögmásodperc) és a Naphoz való közelsége miatt a Merkúr felszínén nehéz megfigyelni a részleteket. XIX. századi megfigyelések alapján úgy gondolták, hogy a Merkúr mindig ugyanazt az oldalát fordítja a Nap felé. Ez nem lett volna meglepő: azt jelentené, hogy a hatalmas tömegű Nap közelében az árapály-erők hatására a Merkúr forgása 1:1 rezonanciába került a keringésével, mint ahogyan a Föld körül keringő Hold esetében történt. 1965-ben azonban a Puerto Ricóban működő Arecibo rádiótávcsővel vizsgálták a Merkúrról visszaverődő jelek Doppler-eltolódását, és megállapították, hogy forgási periódusa 58,65 nap, amely nem egyezik a keringés 87,97 napos periódusával. Az eredményt később (1974.) a Mariner űrszonda adatai is megerősítették.

(b) A Merkúr pályáját tekintsük körnek. Milyen hosszú a Merkúron egy szoláris nap (azaz mennyi idő telik el két egymást követő napfelkelte vagy napnyugta között)?

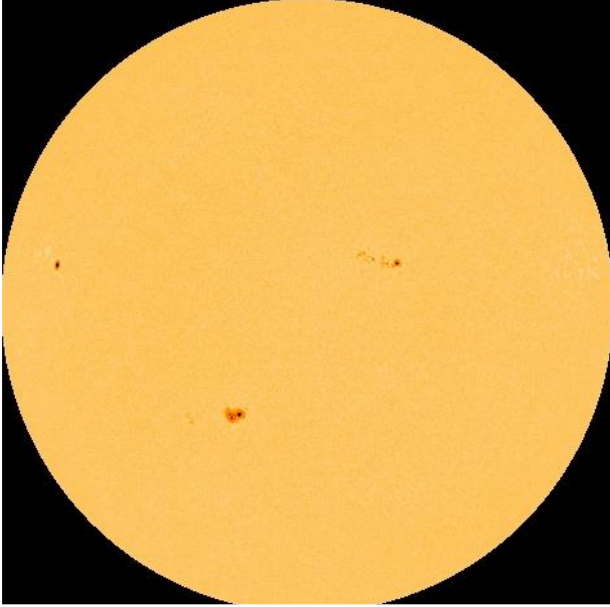
(c) A Merkúr pályája valójában nem kör, hanem viszonylag elnyúlt ellipszis. Napközelben a Merkúr keringése gyorsabb, a keringés szögsebessége eléri az $1,26 \cdot 10^{-6}/s$ értéket. Hasonlítsd össze ezt a maximális szögsebességet a Merkúr tengelyforgásának szögsebességével. A Merkúron tartózkodó megfigyelő számára milyen következményekkel jár ez az eredmény a Nap látszólagos égi mozgására nézve?

1.10 A következő képsorozat a napfoltok helyzetét mutatja a feltüntetett időpontokban. A képeken (Forrás: soho_realtime_hmi_Continuum) végzett mérések segítségével határozd meg a napfoltok körülfordulási idejét két különböző heliografikus szélességen.

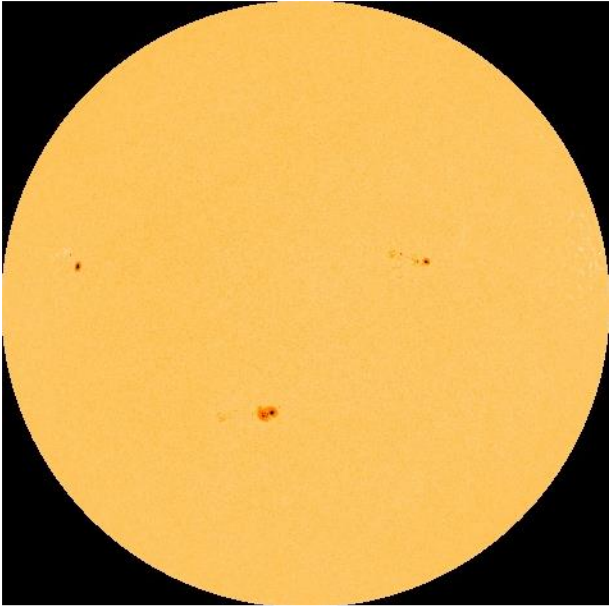
A mérést megkönnyítheti az alábbi koordinátahálózat. (Ha a fehér színt átlátszóvá tesszük, megfelelő méretben ráhelyezhető a többi képre.)



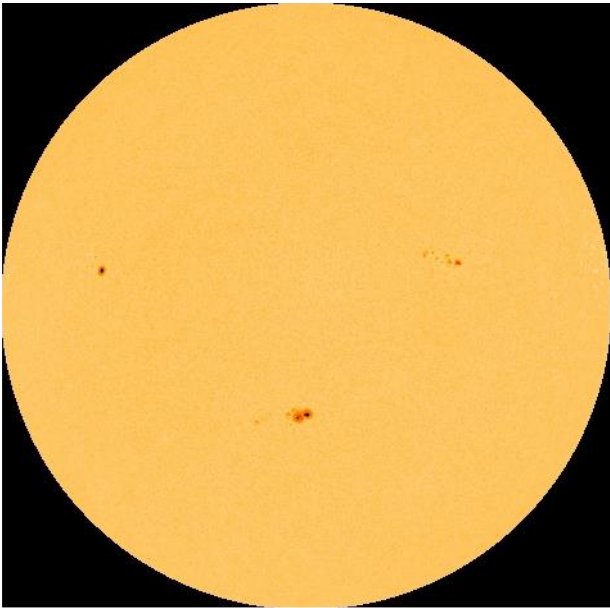
1. 2016/10/08, 07:30



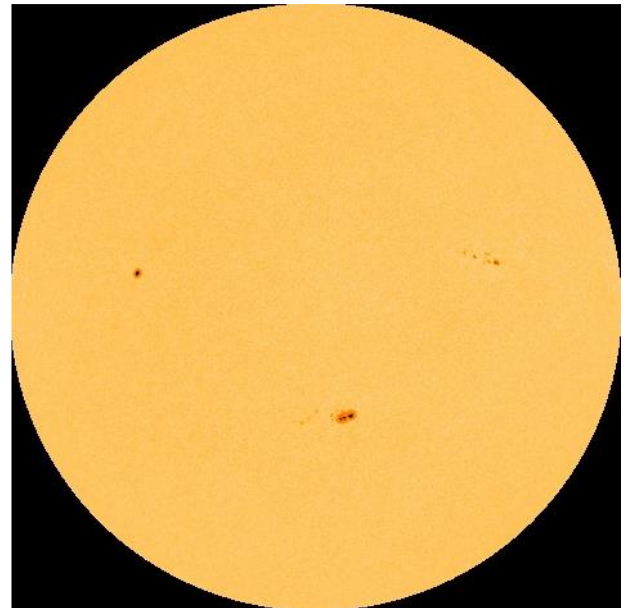
2. 2016/10/08, 19:30



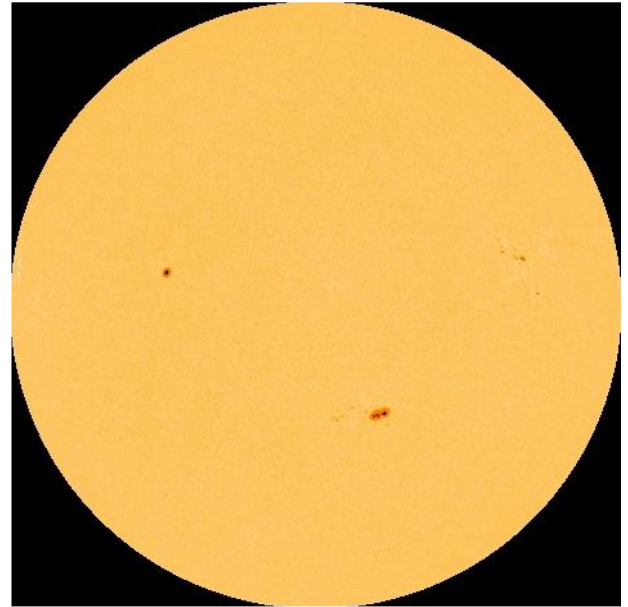
3. 2016/10/09, 07:30



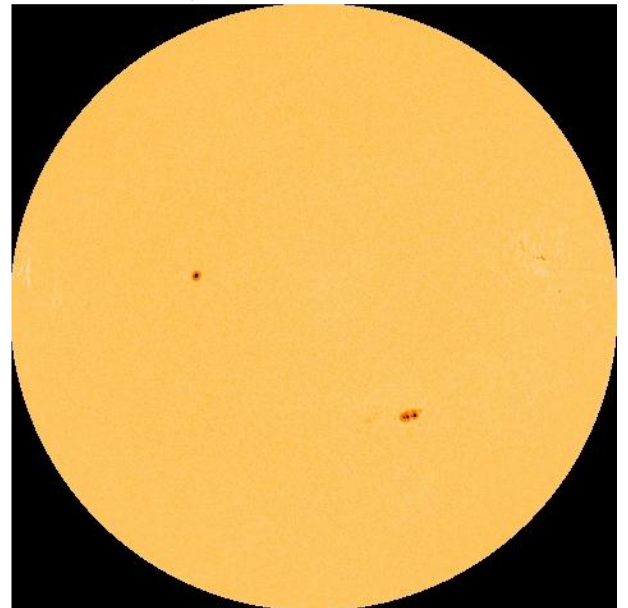
4. 2016/10/09, 19:30



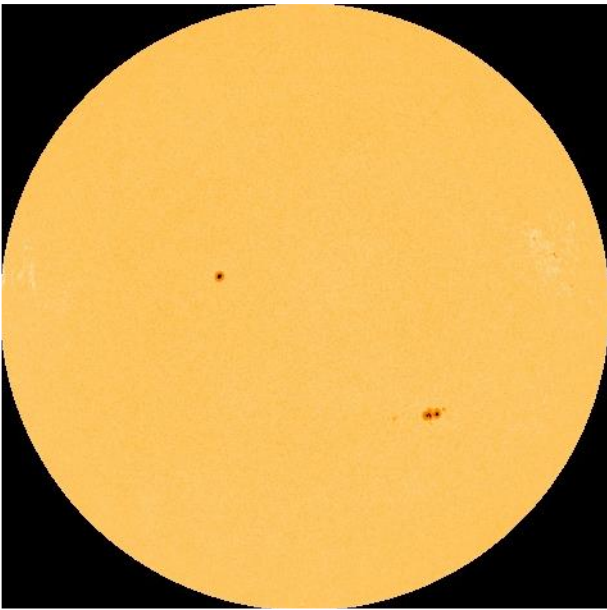
5. 2016/10/10, 07:30



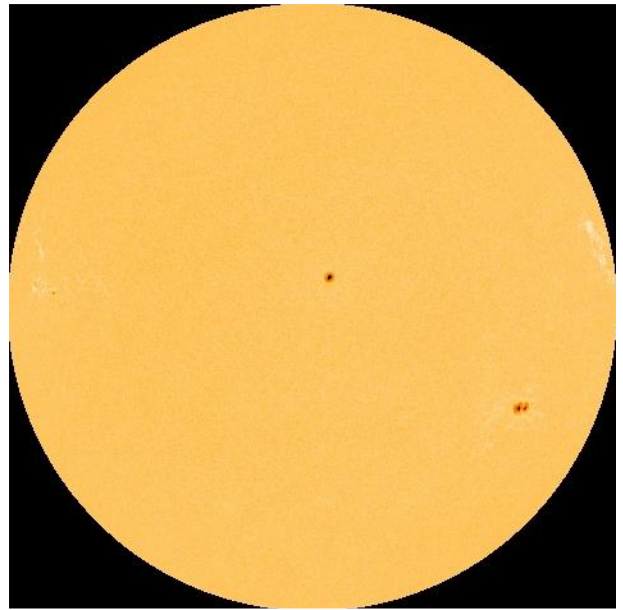
6. 2016/10/10, 19:30



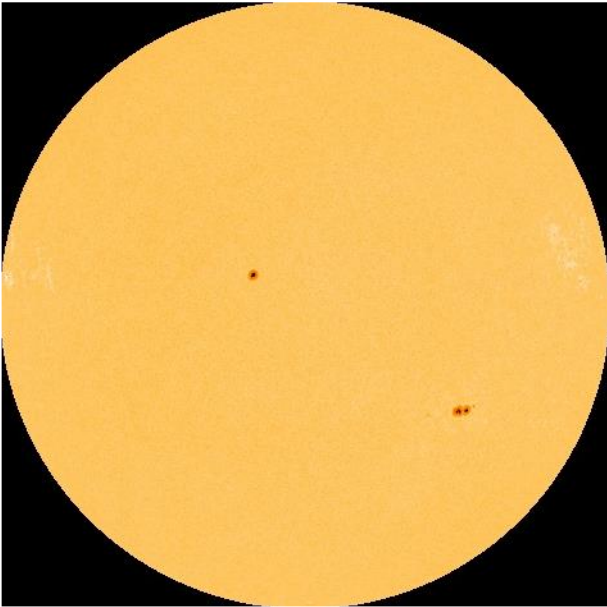
7. 2016/10/11, 07:30



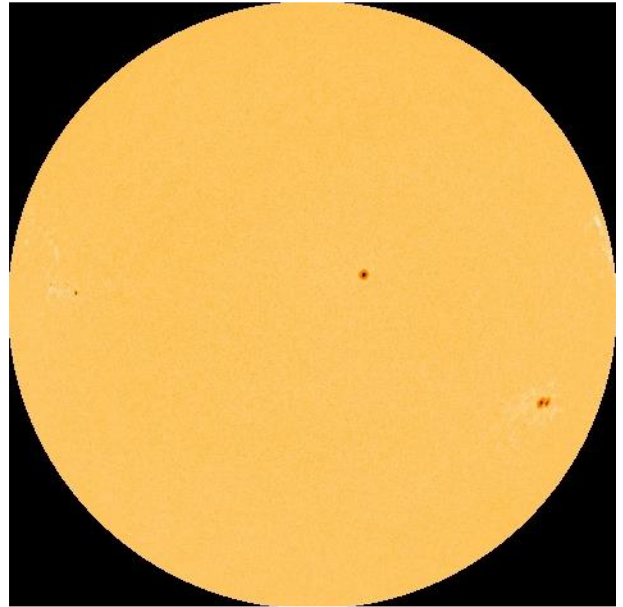
8. 2016/10/11, 19:30



11. 2016/10/13, 07:30



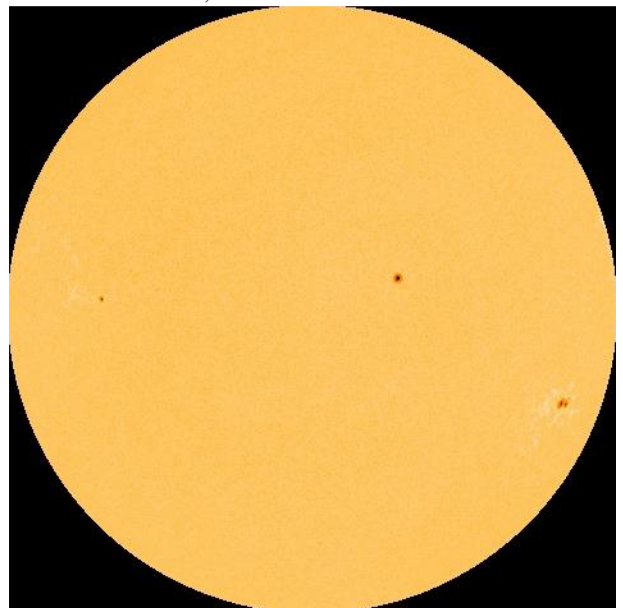
9. 2016/10/12, 07:30



12. 2016/10/13, 19:30



10. 2016/10/12, 19:30



Megoldás 1.

1.1 (a) $19' = 19/60 = 0,32^\circ = 5,5 \cdot 10^{-3}$ rad.

$$17\,000 \cdot 5,5 \cdot 10^{-3} = 94 \text{ fényév}$$

(b) Ha a kép szélessége 19 egység, akkor (pl. vonalzóval megmérve) a keresett távolság kb. 9 egység.

$$94 \cdot 9/19 = 45 \text{ fényév.}$$

(c) 1 fényév = $9,5 \cdot 10^{12}$ km.

$$45 \text{ fényév} = 4,3 \cdot 10^{14} \text{ km}$$

$$(4,3 \cdot 10^{14})/10\,000 = 4,3 \cdot 10^{10} \text{ s} = 1400 \text{ év}$$

1.2 (a) A köd legnagyobb mérete a képen kb.

6,5 cm, vagyis $65/0,2 = 13$ fényév.

A sugár ennek a fele. Az eltelt idő kb. 950 év.

A sebesség $0,5 \cdot 13$ fényév / 950 év =

$$= 0,5 \cdot 3,0 \cdot 10^8 \cdot 13/950 = 2,1 \cdot 10^6 \text{ m/s.}$$

$$(b) \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,033} = 190 \text{ rad/s}$$

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \frac{2\pi}{T + \Delta T} - \frac{2\pi}{T} =$$

$$= \frac{2\pi}{0,033 + 1,26 \cdot 10^{-5}} - \frac{2\pi}{0,033} = -0,0727 \text{ rad/s}$$

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{-0,0727}{365 \cdot 24 \cdot 3600} = -2,3 \cdot 10^{-9} \text{ rad/s}^2$$

Vagy:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2\pi}{T} \right) = -\frac{2\pi}{T^2} \cdot \frac{dT}{dt} =$$

$$= -\frac{2\pi}{0,033^2} \cdot \frac{1,26 \cdot 10^{-5}}{365 \cdot 24 \cdot 3600} = -2,3 \cdot 10^{-9} \text{ rad/s}^2$$

$$(c) t = \frac{-\omega}{\beta} = \frac{-2\pi}{\beta T} = \frac{2\pi}{2,3 \cdot 10^{-9} \cdot 0,033} =$$

$$= 8,3 \cdot 10^{10} \text{ s} = 2600 \text{ év}$$

(d) Az eltelt idő kb. 1000 év

(pontosabban nem érdemes számolni).

$$\Delta\omega = \beta \cdot t = -2,3 \cdot 10^{-9} \cdot 1000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \approx$$

$$\approx -70 \text{ rad/s}$$

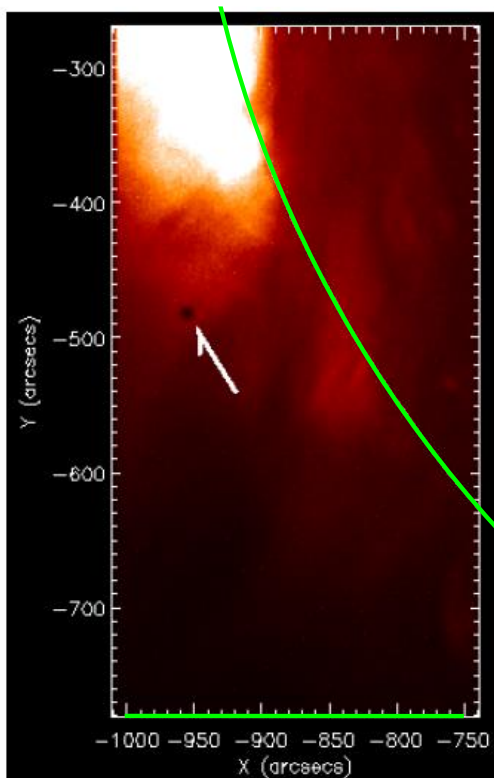
A kezdeti szögsebesség becslést értéke

$$190 + 70 = 260 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{260} = 0,024 \text{ s}$$

1.3 (a) A Merkúr és a Föld nem pontosan ugyanabban a síkban kering a Nap körül. Átvonulást csak olyankor láthatunk, amikor mindkét bolygó a pályasíkok metszéspontjában tartózkodik.

(b) Ha a képen a vízszintes tengelyen mért $250''$ $8,3$ cm hosszú, akkor a kör átmérője 58 cm-nek adódik, ez $250 \cdot 58/8,3 = 1800$ szögmásodpercrek felel meg.



1.4 Három darab henger alakú burgonyacsipzses dobozból például 750 mm hosszú cső készíthető.

Ha a kép átmérője $(7 \pm 0,5)$ mm-nek adódik, a látószög kicsinysége miatt a radiánban kifejezett értéke

$$\frac{7}{752} = 9,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad} =$$

$$= 0,53^\circ \pm 7\% =$$

$$= (0,53 \pm 0,04)^\circ$$

1.5 Ilyen távoli tárgy esetén a képtávolság a fókusz távolsággal egyenlő. A tárgy és a kép mérete a távolságokkal arányos:

$$\frac{h'}{f} = \frac{h}{t}$$

$\frac{h}{t}$ a Hold szögátmérője, amely maximálisan

$$33'31'' = 0,00975 \text{ rad.}$$

A chip kisebbik mérete 16 mm, ekkora lehet tehát a Hold képének átmérője.

$$h' = \frac{h}{t} \cdot f = 0,00975f$$

Ennek kell ráfértie a chipre:

$$0,00975f \leq 16$$

$$f \leq 1640 \text{ mm.}$$

1.6 A Nap távolsága $1,5 \cdot 10^{11}$ m, átmérője $1,4 \cdot 10^9$ m. Az objektív fókusz síkjában

$$1,4 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,2}{1,5 \cdot 10^{11}} = 1,12 \text{ cm}$$

méretű kép keletkezik. Az okulár számára ez a tárgy, így az okulár nagyítása

$$\frac{16}{1,12} = 14,3.$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{t} + \frac{1}{14,3t}$$

$$\frac{15,3}{14,3t} = \frac{1}{2}$$

$$k = 14,3t = 2 \cdot 15,3 = 30,6 \text{ cm.}$$

Ennyivel az okulár elé kell helyezni az ernyőt.

1.7 (a) 90 perc = 1,5 óra.

A Föld tengelyforgási periódusa 23,93 óra

$$\frac{1,5}{23,93} \cdot 360^\circ = 22,6^\circ.$$

(A rajzról is leolvasható, de igen pontatlanul.)

(b) A két egymás utáni napkelte vagy napnyugta között eltelt idő a Föld Nap körüli keringése miatt hosszabb, mint 1,5 óra:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{1,5} - \frac{1}{365,26 \cdot 24}$$

$$T = 1,5002 \text{ óra.}$$

Az eltérés kb. 1 másodperc. 24 óra alatt

$$\frac{24}{1,5002} = 15,997$$

keringési periódus zajlik le, majdnem 16. Ez majdnem mindig 16 napkeltét és ugyanannyi napnyugtát jelent. (A napkelte után kb. 45 perccel már jön is a napnyugta.) A 24 órás időtartam

azonban megválasztható úgy is, hogy a két esemény egyikéből csak 15 db férjen bele.

1.8 A pálya sugara

$$r = r + h = 6370 + 7 = 6377 \text{ km.}$$

$$\text{Keringési ideje } T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\gamma M}} =$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{(6,377 \cdot 10^6)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}} = 5070 \text{ s.}$$

Ezalatt a Föld 21° -kal fordul el nyugatról keletre, tehát a szonda Budapesttől ($K19^\circ$ hosszúság) 21° -kal nyugatra, $Ny2^\circ$ hosszúságnál haladt át (Anglia felett, kb. Birmingham-nél).

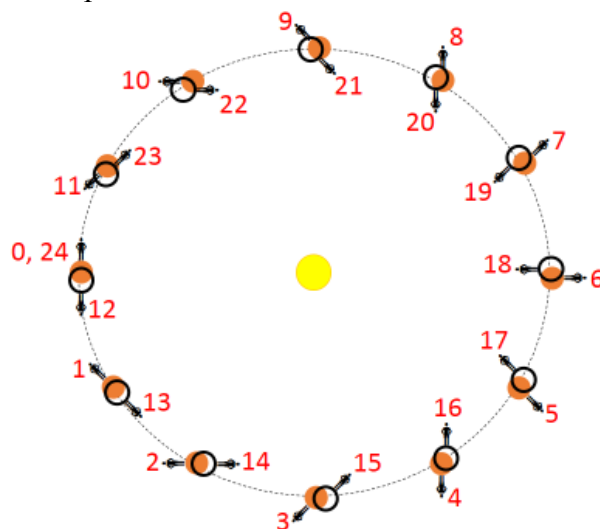
1.9 (a) $87,97 \text{ nap} / 58,65 \text{ nap} = 1,500$.

Vagyis 3:2 rezonanciában vannak egymással.

$$(b) \frac{1}{58,65} - \frac{1}{87,97} = 0,005683$$

$$\frac{1}{0,005683} = 176,0 \text{ nap, vagyis két Merkúr-év.}$$

Az ábra két keringési perióduson (azaz három tengelyforgási perióduson) keresztül, egyenlő időközönként mutatja a Merkúr felszínén álló megfigyelőt. A 0-val és 24-gyel jelölt pozícióban a megfigyelő napnyugtát tapasztal, a 12. pozícióban napfelkeltét.



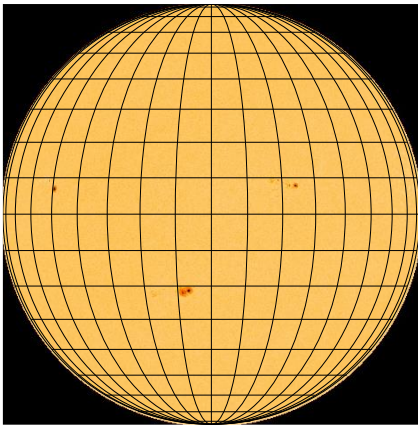
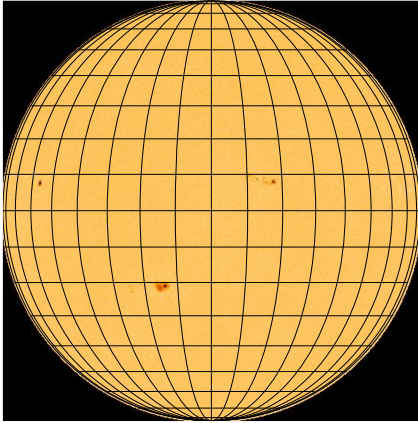
(c) A tengelyforgás szögsebessége

$$\frac{2\pi}{58,464 \cdot 24 \cdot 3600} = 1,24 \cdot 10^{-6} / \text{s.}$$

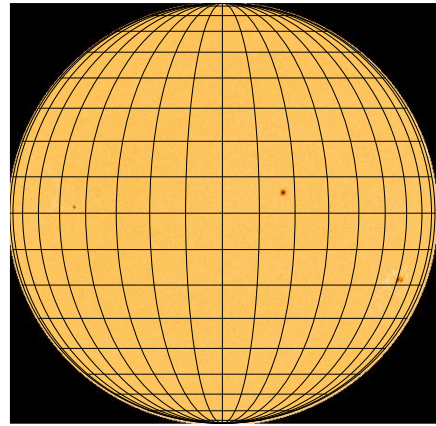
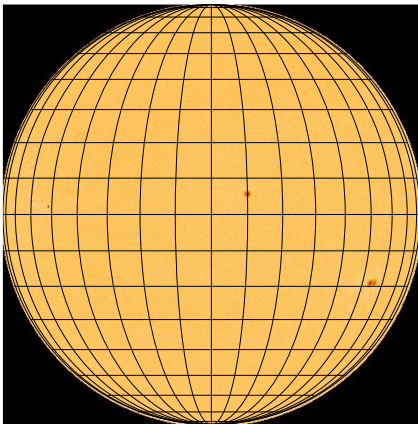
A keringés szögsebessége ennél nagyobb, vagyis a napközben járó Merkúrról nézve a Nap egy ideig visszafelé, nyugatról keletre halad az égen. A bolygó megfelelő helyén tartózkodó megfigyelő számára ez akár azt is jelentheti, hogy a nap

felkel, hamarosan újra lenyugszik (keleten!) majd újra felkel.

1.10 A koordinátahálózatot megfelelő méretben ráillesztve a képekre, 5 és fél napon át kísérhetjük két folt(csoport) mozgását.



és így tovább ...



Az egyik folt kb. 7° szélességen található.

Hosszúsága 5,5 nap alatt egyenletesen

-56° -ról $+10^\circ$ -ra változik,

vagyis 66° -kal látjuk elfordulni.

Vegyük figyelembe, hogy a megfigyelés a Földről történik, amely a nap forgásával azonos irányban kering. Egy év alatt 360° -ot tesz meg, vagyis naponta kb 1° -ot, 5,5 nap alatt $5,5^\circ$ -ot.

5,5 nap alatt a Nap tengelye körül a folt

$$66 + 5,5 = 71,5^\circ\text{-ot fordul}$$

360° megtételéhez, egyenes arányossággal, 28 nap szükséges.

A másik folt kb. -20° szélességen ugyanennyi idő alatt -14° hosszúságról $+50^\circ$ -ra jut.

$$64 + 5,5 = 69,5^\circ$$

Ennek körülfordulási ideje tehát 29 nap.

Vagy:

Az egyik folt 5,5 nap alatt 66° -ot fordul a Földről nézve, ez

$$T' = 5,5 \cdot \frac{360}{66} = 30\text{nap}$$

periódusnak felel meg.

A Földről nézve tapasztalt forgási szögsebesség kisebb a tengelyforgás szögsebességénél, mert a Föld a tengelyforgással azonos irányban kering kering a Nap körül. A Földről megfigyelt szögsebesség a napfolt tengely körüli forgásának, valamint a Föld keringésének az eredőjeként adódik, vagyis a két szögsebesség különbsége:

$$\frac{2\pi}{30} = \frac{2\pi}{T} - \frac{2\pi}{365,25}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{30} + \frac{1}{365,25}$$

$$T = 28 \text{ nap}$$

A másik folt 5,5 nap alatt 64° -ot fordul a Földről nézve, ez

$$T' = 5,5 \cdot \frac{360}{64} = 30,9\text{nap}$$

periódusnak felel meg.

A tengely körüli forgás periódusára

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{30,9} + \frac{1}{365,25}$$

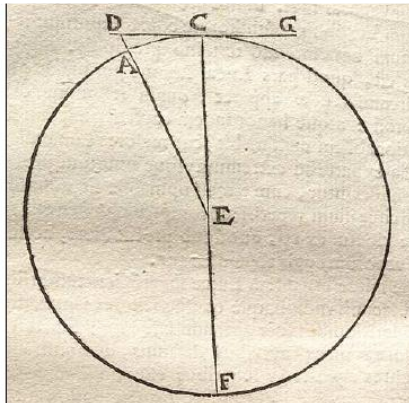
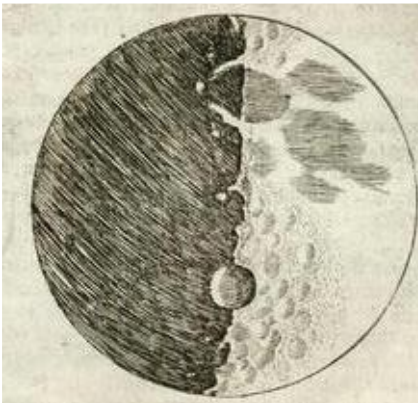
$$T = 29 \text{ nap}$$

2. Régi mérések modern adatokkal és technikával

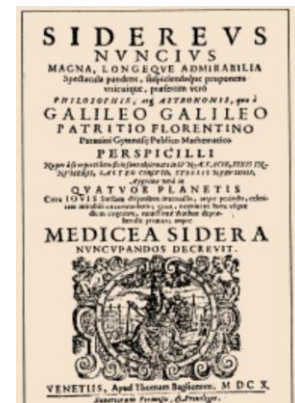
A HOLD HEGYEINEK MAGASSÁGA: GALILEI MÉRÉSEI

2.1 (a) A Hold felszíni alakzatai annál jobban kivehetők, minél hosszabbak az árnyékok. Melyik holdfázis idején legalkalmasabbak a körülmények a Hold megfigyelésére az esti órákban?

(b) Sidereus Nuncius című könyvében (1610) Galilei becslést ad a Hold hegyeinek magasságára. Az általa rajzolt ábrán látható, hogy félhold idején a Hold megvilágított felének határvonalától (a terminátortól) nem messze található hegyek csúcsát még súrolja a napfény. Galilei az egyik ilyen a megvilágított csúcsról megállapította, hogy $1/20$ holdátmérőnyire látszik a terminátortól (a Hold megvilágított felének határvonalától). Azóta már tudjuk, hogy a Hold sugara 1740 km. Határozzuk meg ez alapján a hegy magasságát.

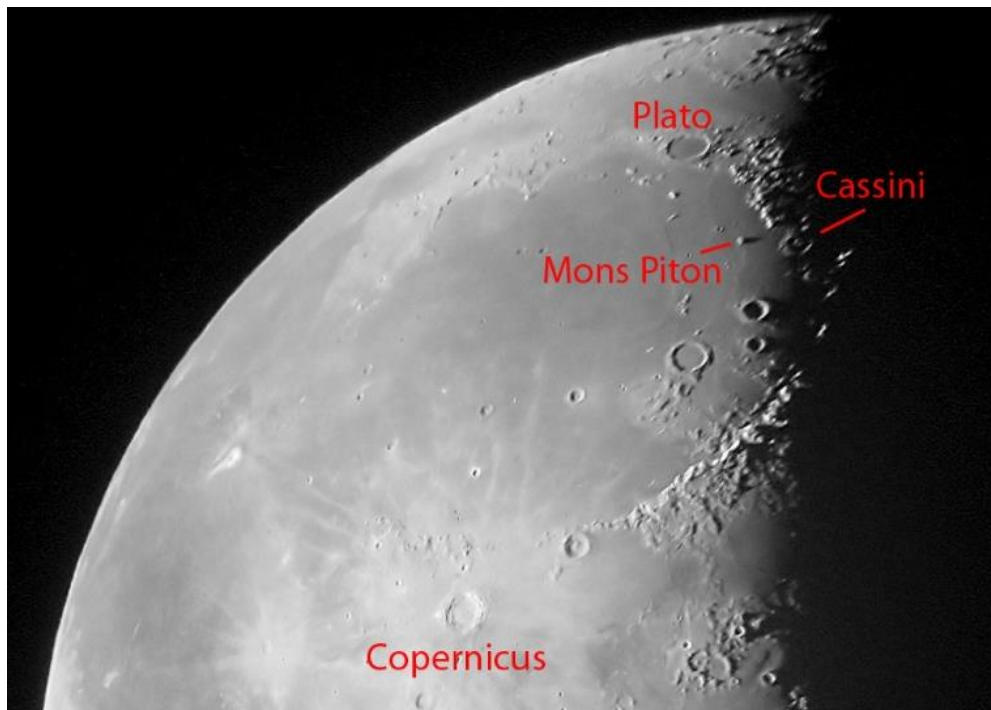


Galilei ábrái



A Sidereus Nuncius címlapja

2.2 A modern fotografikus technika segítségével a Hold sugarának ismeretében a domborzata által vetett árnyékból is meghatározhatjuk a hegyek (vagy kráterek) magasságát. Az alábbi, utolsó negyedkor készült képen látható a Mare Imbriumból, vagyis Esők tengere nevű síkságból kiemelkedő Mons Piton elnevezésű magányos hegyecsúcs. Mérd meg a Hold képén mekkora a hegy távolsága a terminátortól, és mekkora a hegy árnyéka. Az adatokból határozd meg a hegy magasságát.



<http://www.jb.man.ac.uk/astronomy/nightsky/Piton1.jpg>

2. Régi mérések modern adatokkal és technikával

A MERKÚR PÁLYÁJA: KEPLER MÓDSZERE

2.3 Kepler a Mars pályáját tanulmányozva jött rá a bolygómozgás törvényeire. Ezt követően kiterjesztette vizsgálatait a többi bolygó pályájára is. A Merkúr pályájának feltérképezésére az alábbiakhoz hasonlóan a legnagyobb keleti és nyugati elongáció¹ adatait használta.

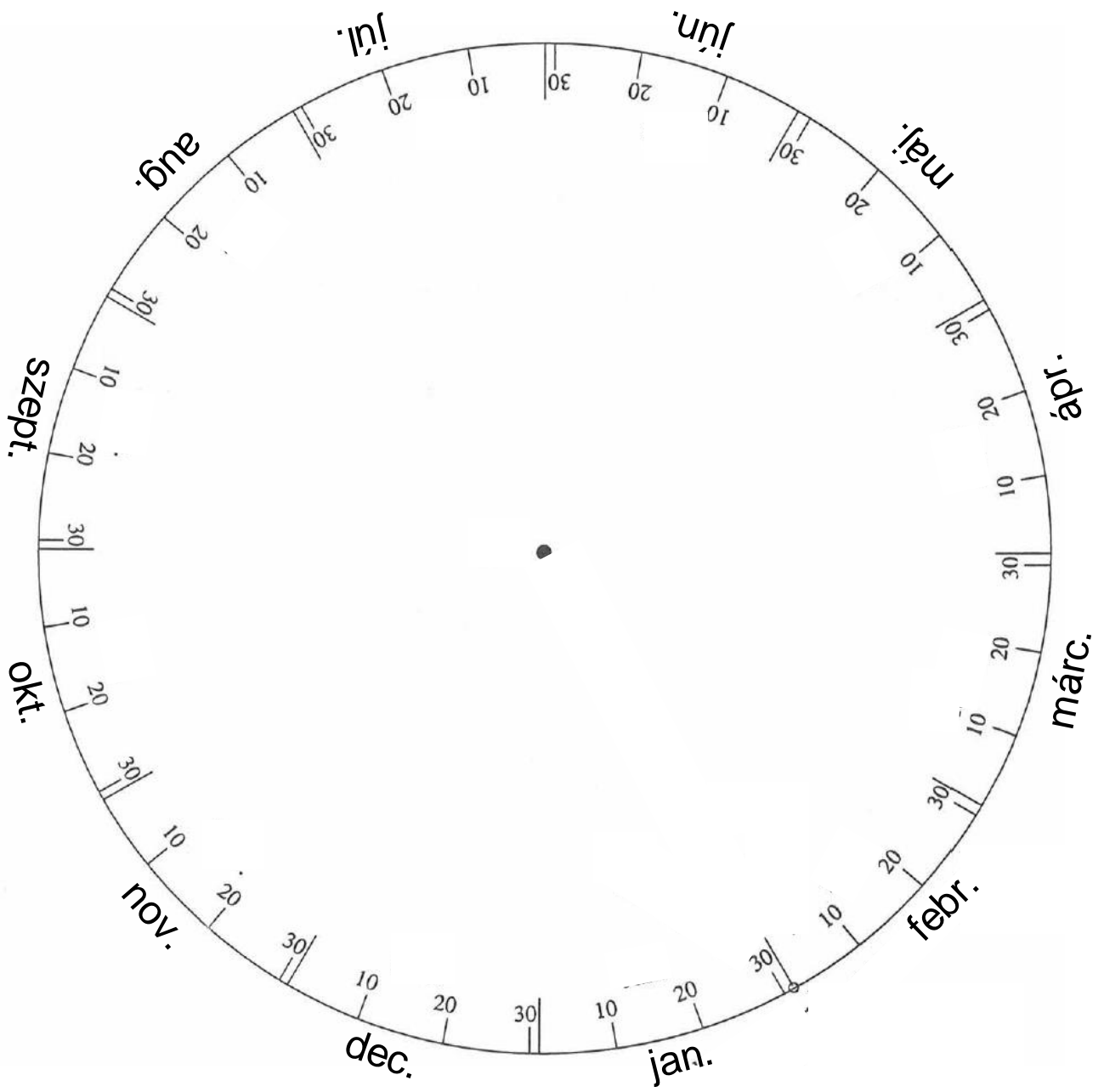
A táblázat a Merkúr legnagyobb keleti és nyugati elongációjának három egymást követő év során mért értékeit mutatja. (Keplernek Tycho Brahe mintegy 20 év során rögzített adatai álltak rendelkezésére.)

2014.	
január 31.	K18,4°
március 14.	Ny27,6°
május 25.	K22,7°
július 12.	Ny20,9°
szeptember 21.	K26,4°
november 1.	Ny18,7°
2015.	
január 14.	K18,9°
február 24.	Ny26,7°
május 7.	K21,2°
június 24.	Ny22,5°
szeptember	K27,1°
október 16.	Ny18,1°
december 29.	K19,7°
2016.	
február 7.	Ny25,6°
április 18.	K19,9°
június 5.	Ny24,2°
augusztus 16.	K27,4°
szeptember 28.	Ny17,9°
december 11.	K20,8°

Nyomtasd ki az alábbi ábrát, amely a Föld (közelítőleg körnek tekintett) pályáját mutatja, középpontjában a Nappal. Vékony hegyű ceruza és szögmérő segítségével a Föld minden egyes, a megadott dátumoknak megfelelő pozíciójából kiindulva rajzold be a Merkúr irányába mutató egyenest. (A Földről a Nap felé nézve keleti elongáció esetén a Föld–Nap egyenestől balra, nyugati esetén jobbra kell felmérni a szöveget.)

- Körülbelül hány kilométernek felel meg a rajzodon a ceruzavonal vastagsága?
- Ahogy egyre több egyenest behúztál, lassan kibontakozik a Merkúr pályája. Rajzold be.
- Mérd meg az ábrán a Merkúr pályájának nagytengelyét.
Hány csillagászati egység a fél nagytengelye (a)?
Vesd össze az eredményt irodalmi adatokkal.
- Kepler harmadik törvénye alapján számítsd ki a keringési időt.
Vesd össze az eredményt irodalmi adatokkal.
- A Napnak (fókusz) a középponttól való távolsága legyen c . Határozd meg a c/a hányadost: ez a pálya excentricitása.
Vesd össze az eredményt irodalmi adatokkal.

¹ A belső bolygók helyzetét a látóiránynak a Nap irányával bezárt szöggel (elongáció/kitérés) lehet jellemezni. Maximális elongáció akkor áll fenn, amikor a Föld, a Nap és a bolygó által alkotott háromszög a bolygónál derékszögű. Ekkor a Földről nézve „fél” fázisban látjuk a bolygót.



2. Régi mérések modern adatokkal és technikával

FÉNYSEBESSÉG: RØMER MÉRÉSE

2.4 A táblázat azokat az időpontokat mutatja a 2017-es év folyamán (perc pontossággal, a téli greenwich-i idő szerint), amikor a Jupiter Io nevű, legbelső holdja a Jupiter árnyékába belép, illetve onnan kilép.

(<https://www.projectpluto.com/jevent.htm>)

Január

2	00:07	be
3	18:35	be
5	13:03	be
7	07:31	be
9	02:00	be
10	20:28	be
12	14:56	be
14	09:24	be
16	03:53	be
17	22:21	be
19	16:49	be
21	11:17	be
23	05:46	be
25	00:14	be
26	18:42	be
28	13:10	be
30	07:39	be

Február

1	02:07	be
2	20:35	be
4	15:03	be
6	09:32	be
8	04:00	be
9	22:28	be
11	16:56	be
13	11:25	be
15	05:53	be
17	00:21	be
18	18:50	be
20	13:18	be
22	07:46	be
24	02:15	be
25	20:43	be
27	15:11	be

Március

1	09:40	be
3	04:08	be
4	22:37	be
6	17:05	be
8	11:33	be
10	06:02	be
12	00:30	be
13	18:59	be
15	13:27	be
17	07:55	be
19	02:24	be
20	20:52	be
22	15:21	be
24	09:49	be
26	04:18	be
27	22:46	be
29	17:15	be
31	11:43	be

Április

2	06:12	be
4	00:40	be
5	19:09	be
7	13:37	be
7	15:49	ki
9	10:18	ki
11	04:46	ki
12	23:15	ki
14	17:43	ki
16	12:12	ki
18	06:41	ki
20	01:09	ki
21	19:38	ki
23	14:06	ki
25	08:35	ki
27	03:04	ki
28	21:32	ki
30	16:01	ki

Május

2	10:30	ki
4	04:58	ki
5	23:27	ki
7	17:56	ki
9	12:25	ki
11	06:53	ki
13	01:22	ki
14	19:51	ki
16	14:19	ki
18	08:48	ki
20	03:17	ki
21	21:46	ki
23	16:14	ki
25	10:43	ki
27	05:12	ki
28	23:41	ki
30	18:09	ki

Június

1	12:38	ki
3	07:07	ki
5	01:36	ki
6	20:05	ki
8	14:33	ki
10	09:02	ki
12	03:31	ki
13	22:00	ki
15	16:29	ki
17	10:57	ki
19	05:26	ki
20	23:55	ki
22	18:24	ki
24	12:53	ki
26	07:21	ki
28	01:50	ki
29	20:19	ki

Július

1	14:48	ki
3	09:17	ki
5	03:45	ki
6	22:14	ki
8	16:43	ki
10	11:12	ki
12	05:41	ki
14	00:09	ki
15	18:38	ki
17	13:07	ki
19	07:36	ki
21	02:05	ki
22	20:33	ki
24	15:02	ki
26	09:31	ki
28	04:00	ki
29	22:28	ki
31	16:57	ki

Augusztus

2	11:26	ki
4	05:55	ki
6	00:23	ki
7	18:52	ki
9	13:21	ki
11	07:50	ki
13	02:18	ki
14	20:47	ki
16	15:16	ki
18	09:45	ki
20	04:13	ki
21	22:42	ki
23	17:11	ki
25	11:40	ki
27	06:08	ki
29	00:37	ki
30	19:06	ki

Szeptember

1	13:34	ki
3	08:03	ki
5	02:32	ki
6	21:00	ki
8	15:29	ki
10	09:58	ki
12	04:26	ki
13	22:55	ki
15	17:23	ki
17	11:52	ki
19	06:21	ki
21	00:49	ki
22	19:18	ki
24	13:46	ki
26	08:15	ki
28	02:44	ki
29	21:12	ki

Október

1	15:41	ki
3	10:09	ki
5	04:38	ki
6	23:06	ki
8	17:35	ki
10	12:03	ki
12	06:32	ki
14	01:00	ki
15	19:29	ki
17	13:57	ki
19	08:26	ki
21	02:54	ki
22	21:23	ki
24	15:51	ki
28	02:39	be
29	21:07	be
31	15:35	be

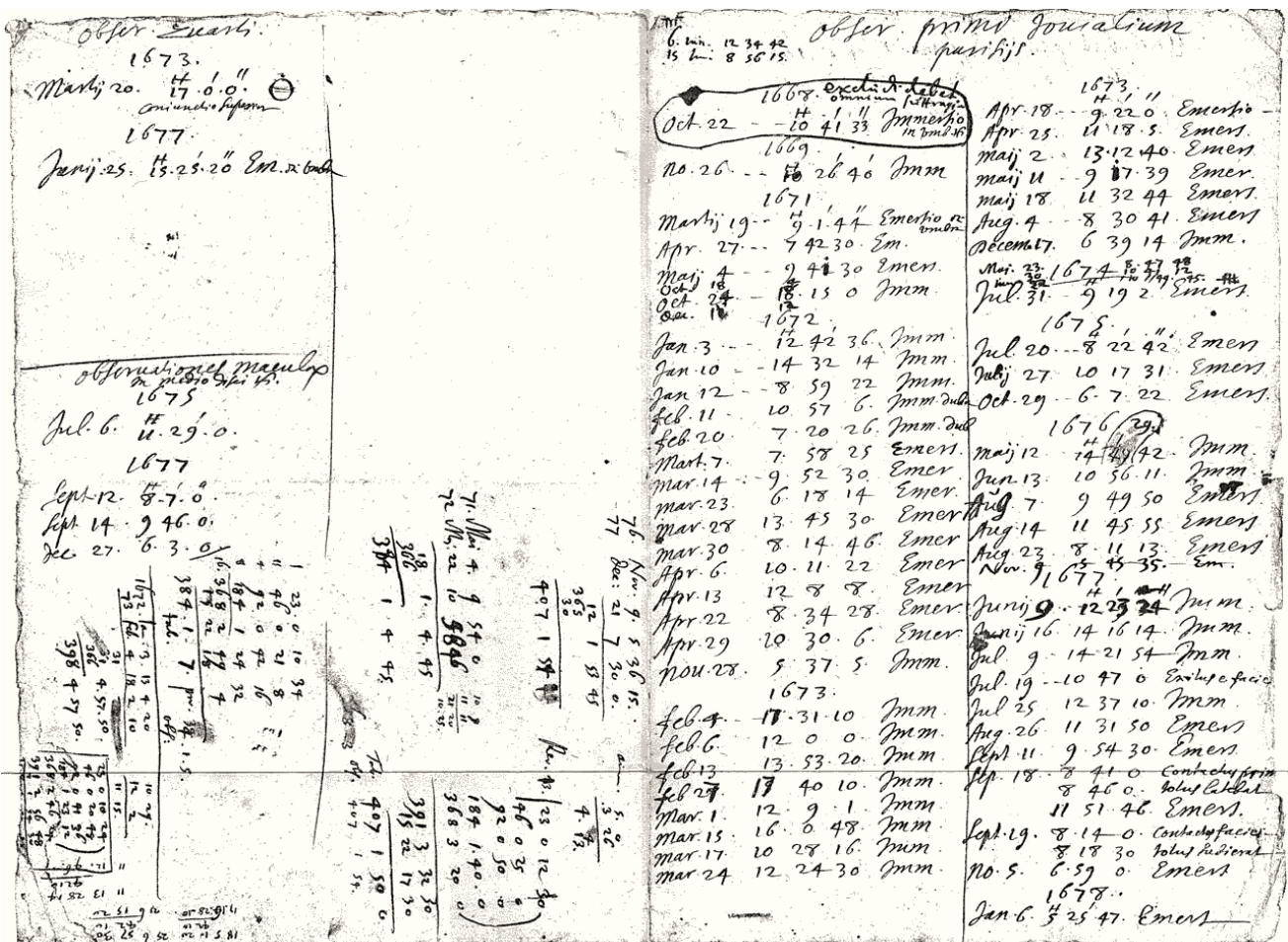
November

2	10:04	be
4	04:32	be
5	23:01	be
7	17:29	be
9	11:58	be
11	06:26	be
13	00:54	be
14	19:23	be
16	13:51	be
18	08:20	be
20	02:48	be
21	21:16	be
23	15:45	be
25	10:13	be
27	04:41	be
28	23:10	be
30	17:38	be

December

2	12:06	be
4	06:35	be
6	01:03	be
7	19:31	be
9	14:00	be
11	08:28	be
13	02:56	be
14	21:25	be
16	15:53	be
18	10:21	be
20	04:49	be
21	23:18	be
23	17:46	be
25	12:14	be
27	06:43	be
29	1:11	be
30	19:39	be

Ilyen megfigyeléseket végzett Ole Rømer dán csillagász is 1668. és 1678. között. Az adatok alapján megmutatta, hogy a fény véges sebességgel terjed. (Rømernek az ábrán látható kéziratlapján az „Imm.” rövidítés az árnyékba való belépést, az „Emer.” rövidítés a kilépést jelenti.)

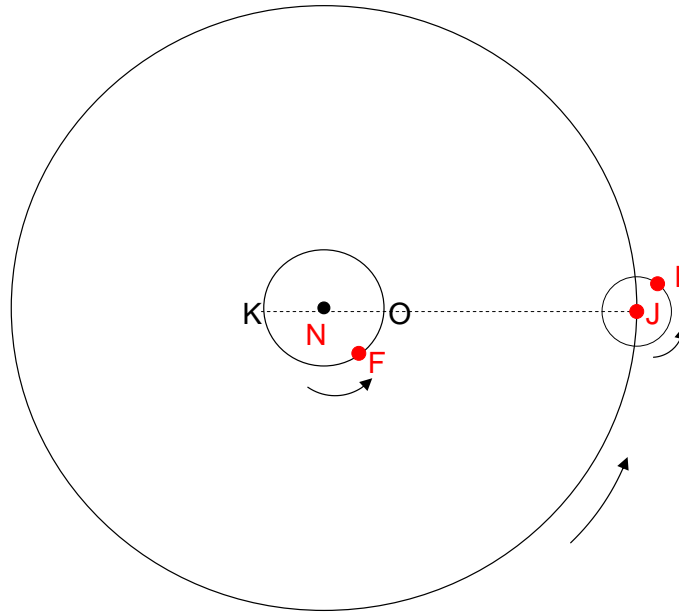


<https://en.wikipedia.org>

(a) A Jupiter 5,2 CSE távolságban kering a Nap körül. Mekkora az NJF szög legnagyobb értéke?

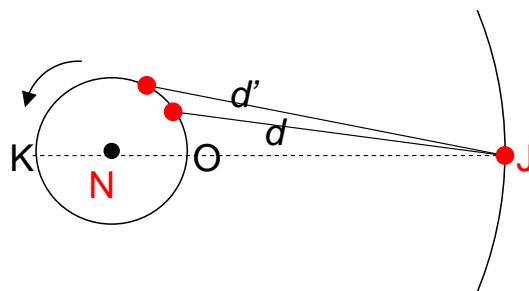
(b) Az Íó közel kering a Jupiterhez, pályasugara csak kb. hatszorosa a Jupiter sugarának. Adjunk magyarázatot arra, hogy – amint a fenti táblázat is mutatja – valamivel több, mint fél évig az Íónak csak az árnyékba való belépését lehet megfigyelni a Földről, majd kb. ugyanennyi időn keresztül csak az árnyékból való kilépése látható. (Természetesen a Föld egy adott pontjáról nem mindegyik esemény figyelhető meg, hiszen a nappali égen a Nap fénye miatt nem láthatjuk a Jupitert, máskor pedig a Föld takarja el előlünk.)

(c) A fenti táblázat alapján állapítsd meg, hogy a 2017-es évnek melyik napján járt a Föld (a Jupiterhez képest pályájának O pontjában, és mikor járt a K pontban. Vagyis mikor volt a Jupiter szembenállásban (O oppozíció), illetve együttállásban (K konjunkció) a Nappal?



(d) Legyen az Io keringési periódusa T . Tegyük fel, hogy a Föld éppen távolodik a Jupitertől (O-tól K felé halad), és az Íónak a Jupiter árnyékából való két egymást követő kilépésekor a Föld Jupitertől való távolsága d , illetve $d' > d$. Mennyi idő telik el a két kilépés észlelése között? (Vedd figyelembe, hogy a fény terjedéséhez idő kell.)

Ha a rákövetkező kilépéskor d'' a távolság, mennyi idő telik el az első és e harmadik kilépés észlelése között?



(e) Tekintsük az oppozíciót követő kilépést nulladiknak. Olvasd ki a táblázatból a nulladik, a tizenötödik, és a harmincadik kilépés idejét.

(f) Az oppozíciókor a Föld és a Jupiter távolsága $d_0 = 4,46$ CSE volt. Határozd meg a Föld és a Jupiter távolságát a tizenötödik, illetve harmincadik kilépés időpontjában.

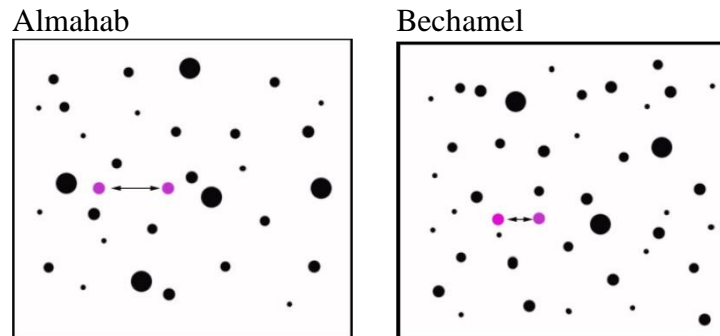
(g) Az eredmények alapján mennyi a fény sebessége?

2. Régi mérések modern adatokkal és technikával

A CSILLAGOK PARALLAXISA: BESSEL MÉRÉSE

2.5 A parallaxis fogalma általánosságban azt a tapasztalatot jelenti, hogy ha egy közeli tárgyra kissé más irányból tekintünk, akkor elmozdulni látszik a távolabbi tárgyak alkotta háttér előtt. A csillagok éves parallaxisa a csillagok látszólagos helyzetében a Föld Nap körüli keringése miatt bekövetkező, ingadozás. Két közeli csillag, az Almahab, illetve a Bechamel két-két megfigyeléséről készültek az alábbi ábrák. Mindkét csillag két megfigyelése között 6 hónap telt el.

(a) Milyen összefüggés van a két csillag távolsága között?



(b) A parallaxis jelensége miatt a Naphoz legközelebbi csillag, az α Centauri 1,49 szögmásodperccel látszik elmozdulni az égen, míg az égbolt legfényesebb csillagának, a Szíriusznak a parallaxis miatti látszólagos elmozdulása 0,753 szögmásodperc. Hány fényév távolságra vannak tőlünk ezek a csillagok?

2.6 A XVI. században Tycho Brahe és más csillagászok szabad szemmel végzett megfigyelésekkel próbálták kimutatni a csillagok éves parallaxisát, hogy eldönthessék a Föld Nap körüli keringésének egyre szélesebb körben felvetődő vitás kérdését. Parallaxist nem észleltek.

Az emberi szem felbontóképessége kb. 0,02 fok. A legközelebbi csillag távolsága 4,3 fényév, (α Centauri, -60° -nál délebbre van, így Tycho Brahe nem láthatta).

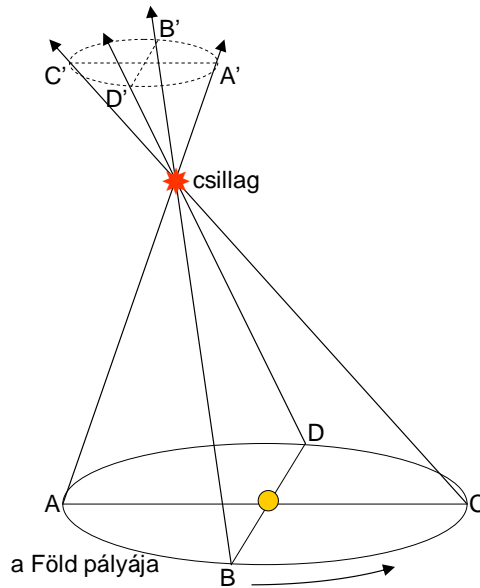
(a) Maximálisan mekkora szöggel változhat két megfigyelése között a látszólagos helyzete?

(b) Hányszor van messzebb az α Centauri, mint az a távolság, amelyről a parallaxis még szabad szemmel észlelhető lenne?

2.7 A heliocentrikus rendszerrel szemben sokáig nyugtalanító ellenérv maradt, hogy nem észleltek éves parallaxist, azaz éves periódusú váltakozást a csillagok látszólagos irányában. A várakozások szerint a következő oldali ábrán jelzett csillag megfigyeléséhez földpálya A pontjában például az A', az átellenes C pontban a C' pont felé kellene irányítani a távcsövet.

(a) Amikor a technikai fejlettség már megengedte, észrevették, hogy valóban minden csillag iránya kb. 40 másodperces éves ingadozást mutat. Ha ez lenne a keresett éves parallaxis, milyen messze volnának a csillagok?

(b) Ma már tudjuk, hogy a csillagok ennél lényegesen messzebb vannak, és nem is mind azonos távolságra, a 18. század elején azonban ez a távolság is hihető eredmény lett volna. Csakhogy valami nem stimmelt. Az A' és C' irányok közötti ingadozást nem a földpálya A és C pontja között észlelték: Ehelyett A' irányba akkor kellett állítani a távcsövet, amikor a Föld a B pontban volt, C' irányba pedig akkor, amikor a D pontban járt. Ugyanígy A-ban D', C-ben pedig B' felé kellett fordítani a műszert. Vagyis az eltolódás a várthoz képest rendre negyedéves késéssel jelentkezett.

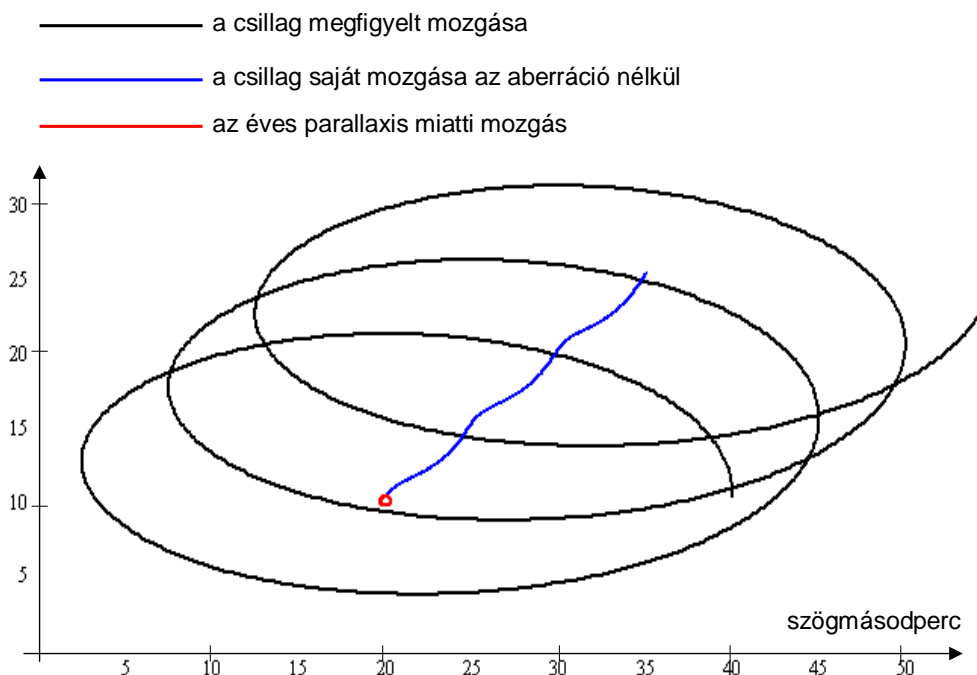


A magyarázatra James Bradley jött rá 1729-ben: a megfigyelt ingadozást az okozza, hogy a fénynek időre van szüksége ahhoz, hogy a távcsövön végighaladjon, és ez alatt az idő alatt a Föld valamelyest előrehalad a pályáján.

Mekkora szögben kell a csillag valóságos irányához képest megdőntenünk a távcsövünket, ha egy olyan csillagot akarunk tanulmányozni, amely pontosan a földpálya síkjára merőleges irányban van?

(c) Mekkora éves ingadozást okoz ez a jelenség a csillag irányában?

2.8 Bár a fény aberrációjának felfedezésével (lásd az előző feladatot) a Föld Nap körüli keringésének ténye a 18. század végén bebizonyosodott, a csillagoknak a keringésből származó éves parallaxisát még sokáig nem tudták kimutatni (így azt sem tudták, milyen messze vannak valójában a csillagok). A parallaxis kimutatása végül először Friedrich Besselnek sikerült 1838-ban. A Hattyú csillagképben látható 61 Cygni nevű csillagot választotta, mivel a 61 Cygni viszonylag gyorsan, körülbelül évi 5 szögmásodperccel látszik elmozdulni a körülötte látható többi csillaghoz képest, ezért valószínűsíthetően közelebb van náluk, így a parallaxisa nagyobb eséllyel észlelhető.

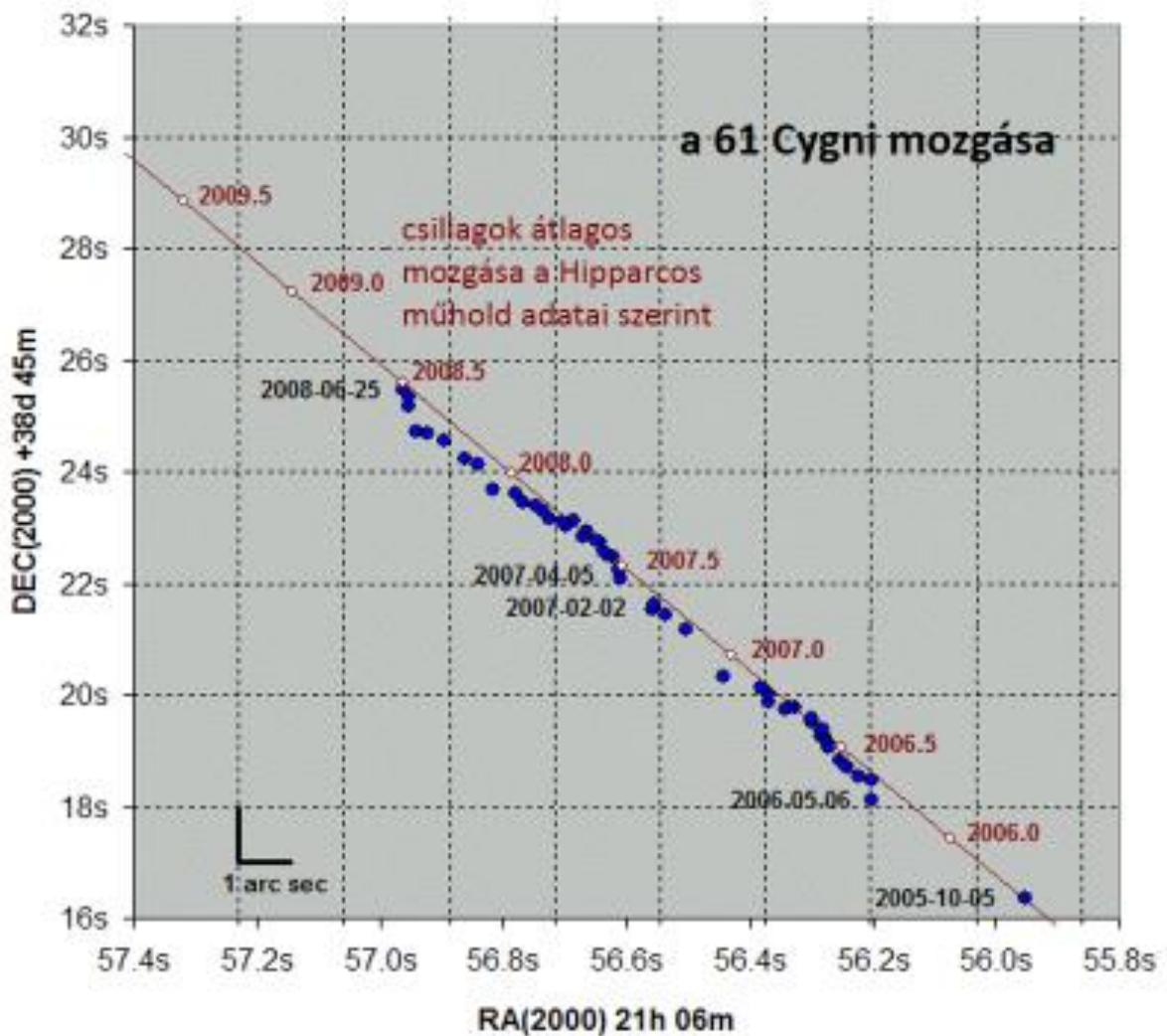


A csillag saját mozgása miatt a parallaxist a saját mozgásra szuperponálódó, éves periódusú hullámzásként kell keresni, amint az ábrán látható kék görbe mutatja. Csakhogy a parallaxisnál kétszer nagyobb nagyságrendű ingadozást okoz az aberráció jelensége, így a csillag valóban észlelt égi pályája a fekete görbe, amelyben az éves fodrozódás már szinte észrevehetetlen.

(a) A fekete csavarvonal miért csak egy irányban (vízszintesen) mutatja az előző feladatban kiszámított évi $40''$ -es aberrációt, míg a másik irányban a kitérések sokkal kisebbek?

(b) Hogyan lehet a megfigyelt fekete görbe helyett a kék görbét előállítani?

(c) 2005. és 2009. között Bessel távcsövéhez nagyon hasonló műszerrel megismételték Bessel megfigyeléseit. Az ábra már modern eszközökkel készült. A következő ábrán az egyenes olyan csillagok átlagos helyzetét ábrázolja, amelyek feltehetőleg az aberráción kívül más elmozdulást nem mutatnak.

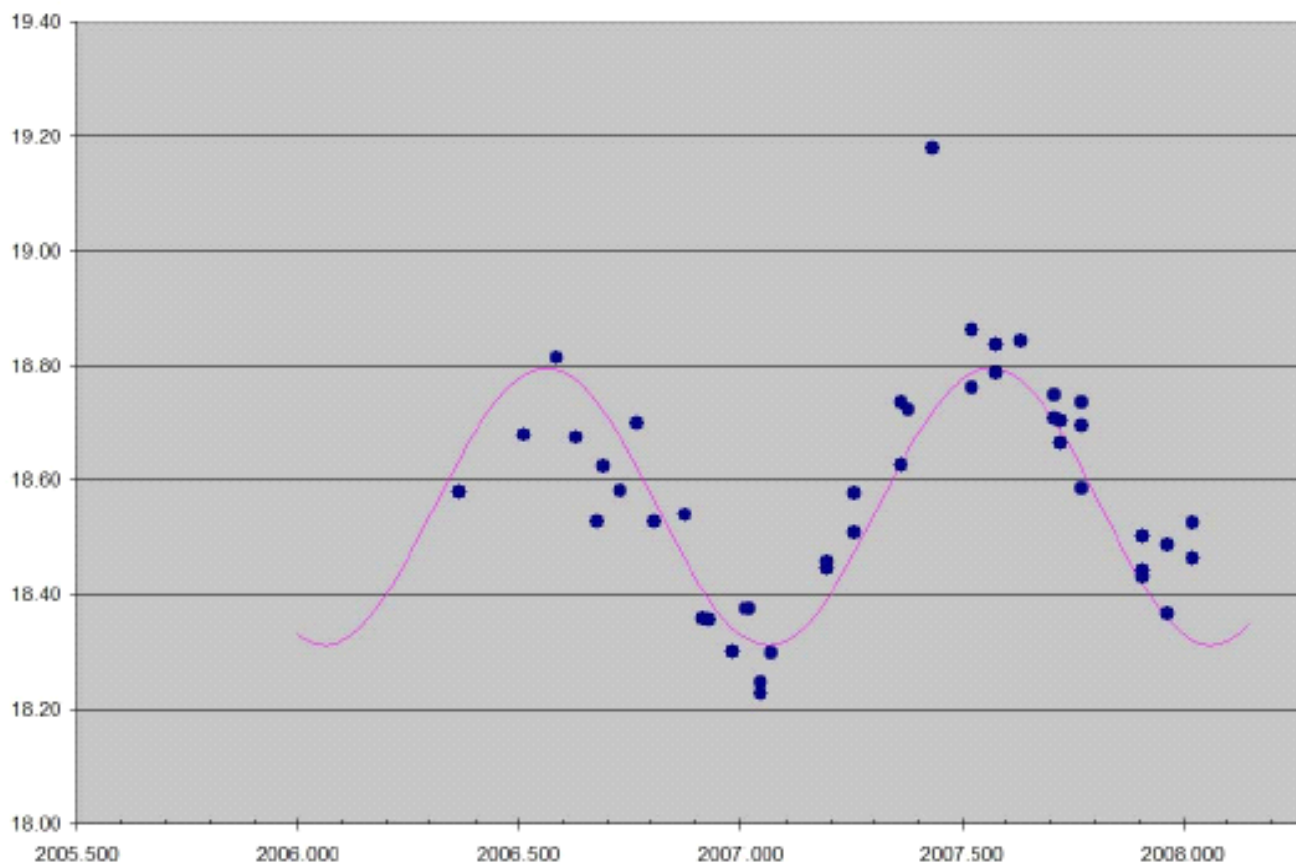


http://www.jdso.org/volume4/number2/Vollmann_74_77.pdf

http://www.richweb.f9.co.uk/astro/nearby_stars.htm

A hullámzó adatsorból kivonva az egyenesnek megfelelő értékeket, megkapjuk a keresett, éves periódusú ingadozást. A következő oldali ábra a szögmásodpercben mért pozíciót mutatja az (években mért) idő függvényében.

A mérési adatok alapján mennyi a 61 Cygni távolsága?



http://www.jdso.org/volume4/number2/Vollmann_74_77.pdf

Megoldás 2.

2.1 (a) A jó kontrasztot biztosító hosszú árnyékok a negyedfázisok idején adódnak. (Teliholdkor a Nap túl magasan van a Hold felszíne fölött, továbbá a nagy fényerő miatt szűrők alkalmazására lehet szükség.) Utolsó negyedkor a Hold csak éjfélnél kel, ezért az első negyed a legkedvezőbb.

$$(b) \frac{1}{20} = \frac{DC}{2r},$$

$$DC = 0,1r$$

$$r^2 + (0,1r)^2 = (r + h)^2$$

$$r^2 + 0,01r^2 = r^2 + 2rh + h^2$$

h a sugárhoz képest kicsi, h^2 elhanyagolható:

$$0,01r^2 = 2rh$$

$$0,01r = 2h$$

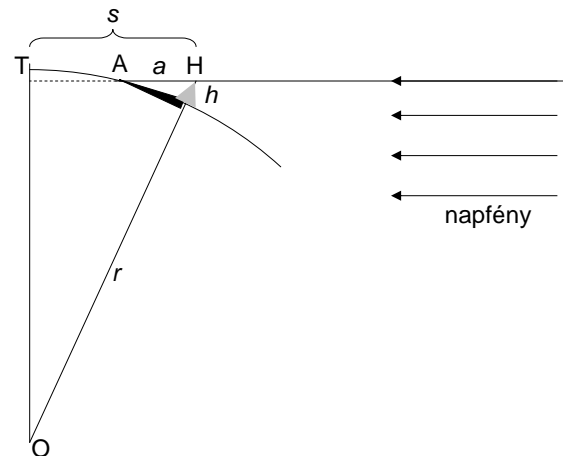
$$h = \frac{r}{200} \approx 9000\text{m}.$$

2.2 Az ábra kissé eltúlozva mutatja a hegyet és az árnyékát. Első vagy utolsó negyed lévén fentről látunk rá a tájra, az árnyékot a hosszúságúnak, a terminátortól való távolságot s -nek észleljük.

A hegy magassága a sugárhoz képest kicsi, ezért hasonló háromszögekkel számolhatunk:

$$\frac{h}{a} = \frac{s}{r}$$

$$h = \frac{as}{r}$$



A méretarány meghatározása:

Ha például az ábrán a húr hossza 13,0 cm, és a körszelet magassága 2,7 cm, akkor

$$r^2 = 6,5^2 + (r - 2,7)^2$$

$$r = 9,2 \text{ cm},$$

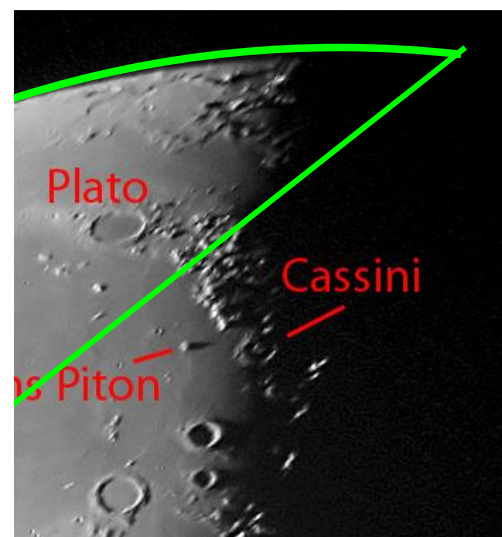
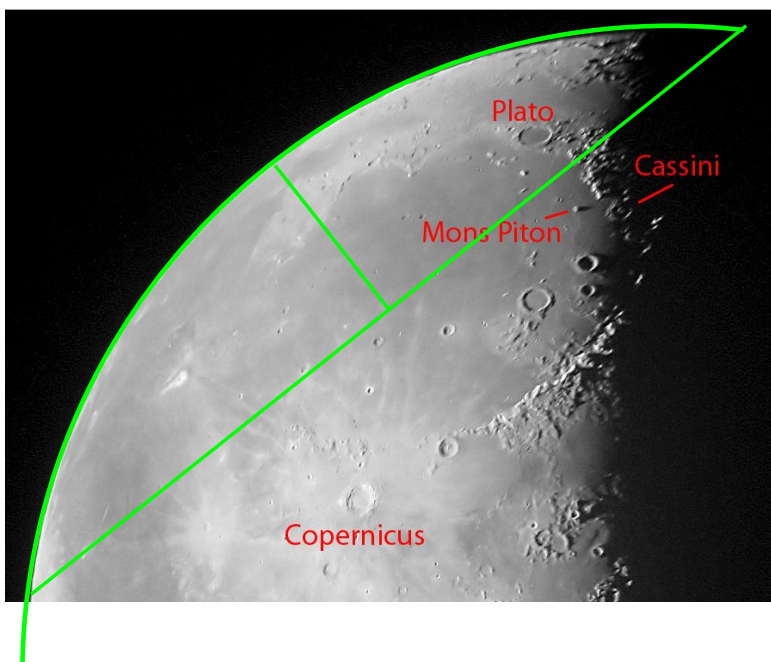
ez felel meg 1740 km-nek.

a és s méréséhez érdemes a képet felnagyítani. Háromszoros nagyítással például 27,5 cm felel meg 1740 km-nek.

Az árnyék hossza $a \approx 0,7$ cm, a csúcs távolsága a terminátortól $s \approx 1,7$ cm (a terminátor helyét nehéz megállapítani). Ezekkel az értékekkel

$$h = \frac{as}{r} = \frac{0,7 \cdot 1,7}{27,5} = 0,043\text{cm},$$

ami kb. 3 km magas hegyet jelent.



2.3 (a) Ha a kör átmérője 15 cm (ez felel meg 2 CSE = $3 \cdot 10^{11}$ m távolságnak) és a ceruzavonal körülbelül 0,05 mm, akkor vastagsága

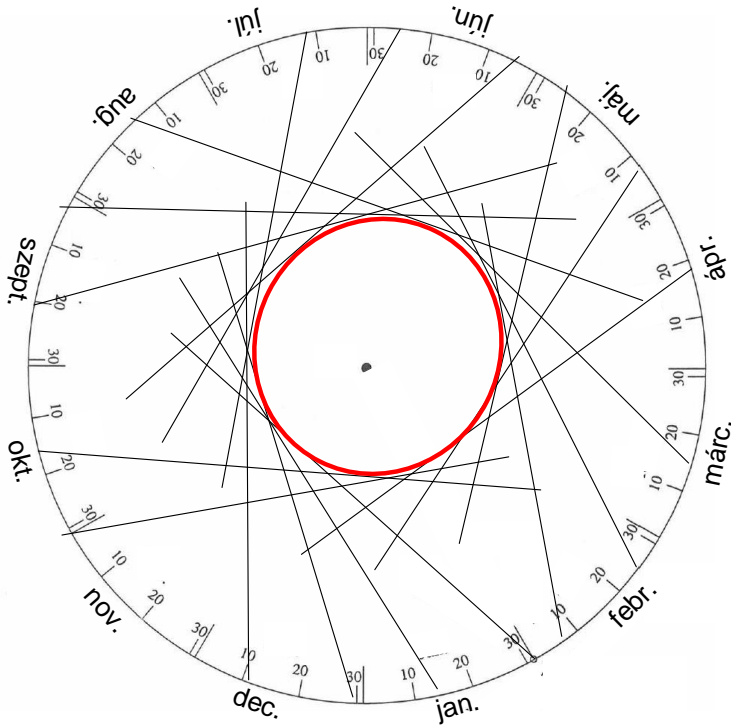
$$5 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{3 \cdot 10^{11}}{0,15} = 1 \cdot 10^8 \text{ m} = 100000 \text{ km}$$

(c) A lenti ábra alapján $a = 0,38$ CSE (irodalmi adat 0,39 CSE)

(d) $0,38^{3/2} = 0,23$ év = 86 nap (irodalmi adat 88 nap)

(e) A fenti ábra alapján az excentricitás 0,17 (irodalmi adat 0,21)

(b)

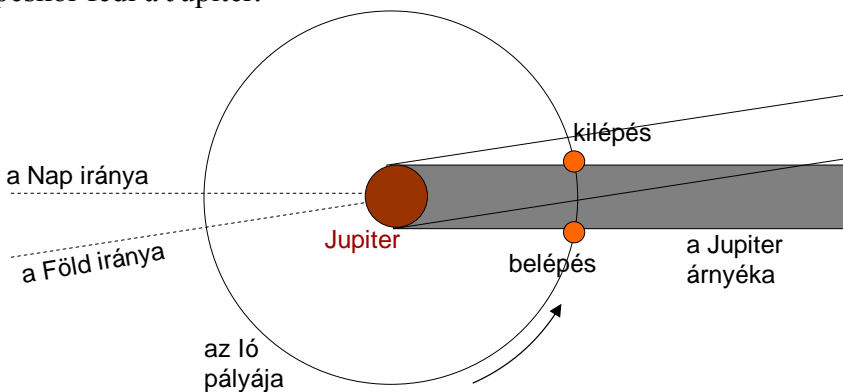
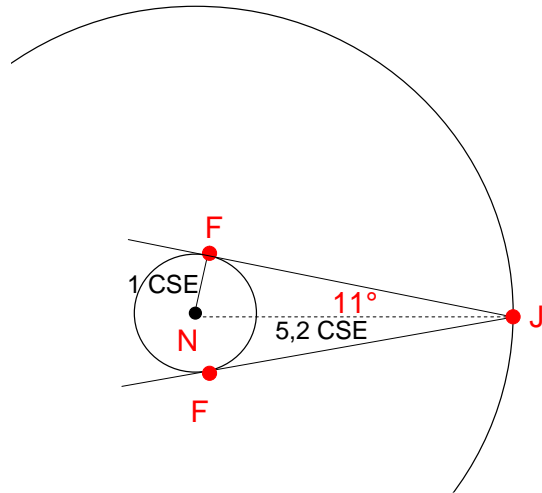


2.4 (a) A szög akkor a legnagyobb, amikor JF érinti a földpályát (a Jupiter kvadrátúrában van a Nappal). Az NFJ derékszögű háromszögben

$$\sin \alpha = \frac{1}{5,2}$$

$$\alpha = 11^\circ$$

(b) Az egyszerűség végett tegyük fel, hogy a három égitest egy síkban van (ez jó közelítéssel teljesül), és tekintsünk el a Jupiter mozgásától. A K-tól O felé haladó Földről az Iónak csak az árnyékból való kilépését láthatjuk, hiszen belépéskor fedi a Jupiter.



(c) Oppozíció: április 7., konjunkció: október 26.

(d) Ha az egyik kilépés t időpillanatban történik, akkor a következő $t + T$ időpillanatban.

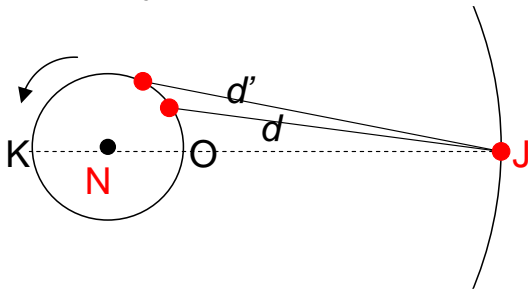
Ha a fény végtelen sebességgel terjedne, akkor az észlelések között is pontosan T idő telne el.

Mivel a fény c sebességgel terjed, a két észlelés ideje

$$t + \frac{d}{c}, \text{ illetve } t + T + \frac{d'}{c},$$

így a közöttük eltelt idő

$$T + \frac{d' - d}{c}.$$



Az első és a harmadik észlelés között

$$T + \frac{d' - d}{c} + T + \frac{d'' - d'}{c} = 2T + \frac{d'' - d}{c}$$

idő telik el, a késések összege tehát a teljes távolságnövekedés osztva a fénysebességgel.

(e) $t_0 =$ április 7. 15:49,

$t_{15} =$ május 4. 04:58,

$t_{30} =$ május 30. 18:09,

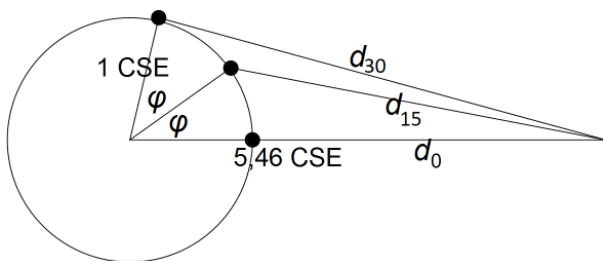
(f) $d_0 = 4,46$ CSE

d_{15} és d_{30} a koszinusztétel segítségével meghatározható:

$t_{15} - t_0 = 26$ nap 13 óra 9 perc, és

$t_{30} - t_{15} = 26$ nap, 13 óra 11 perc,

vagyis mindegyik kb. 26,55 nap.



26,55 nap alatt a Föld szögelfordulása a pályáján

$$\varphi = 360^\circ \cdot \frac{26,55}{365} = 26,2^\circ.$$

$$d_{15}^2 = 1^2 + 5,46^2 - 2 \cdot 1 \cdot 5,46 \cdot \cos 26,2^\circ$$

$$d_{15} = 4,58 \text{ CSE}$$

$$d_{30}^2 = 1^2 + 5,46^2 - 2 \cdot 1 \cdot 5,46 \cdot \cos(2 \cdot 26,2^\circ)$$

$$d_{30} = 4,91 \text{ CSE}$$

$$(g) \quad 26 \text{ nap } 13 \text{ óra } 9 \text{ perc} = 15T + \frac{d_{15} - d_0}{c}$$

$$26 \text{ nap } 13 \text{ óra } 11 \text{ perc} = 15T + \frac{d_{30} - d_{15}}{c}.$$

A különbség

$$2 \text{ perc} = \frac{d_{30} + d_0 - 2d_{15}}{c} =$$

$$= \frac{4,91 + 4,46 - 2 \cdot 4,58}{c} = \frac{0,21}{c}$$

vagyis a fény 2 perc alatt 0,21 CSE távolságot tesz meg, tehát

$$c = \frac{0,21 \cdot 1,5 \cdot 10^{11}}{120} = 2,6 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

2.5 (a) Mivel az Almahab parallaxisa körülbelül kétszerese a Bechamel parallaxisának, a Bechamel kétszer olyan messze van, mint az Almahab.

(b) Ha a csillag távolsága d , a földpálya átmérője pedig D , akkor onnan a földpálya átmérőjének látószöge (radiánban kifejezve) d/D .

$$1,494'' = 7,25 \cdot 10^{-6} \text{ rad és}$$

$$0,753'' = 3,65 \cdot 10^{-6} \text{ rad.}$$

Az α Centauri távolsága

$$d = \frac{3,0 \cdot 10^{11}}{7,25 \cdot 10^{-6}} = 4,14 \cdot 10^{16} \text{ m} = 4,4 \text{ fényév},$$

A Szíriuszé

$$d = \frac{3,0 \cdot 10^{11}}{3,65 \cdot 10^{-6}} = 8,22 \cdot 10^{16} \text{ m} = 8,7 \text{ fényév}.$$

A Szíriusz tehát körülbelül kétszer olyan messze van, és ennek megfelelően feleakkora a látszólagos elmozdulása (akárcsak az (a) feladatban szereplő csillagok esetében).

2.6 (a) Az α Centauri távolsága $4,1 \cdot 10^{16}$ m. Ilyen távolságból a földpálya átmérőjének látószöge

$$\frac{2 \cdot 1,5 \cdot 10^{11}}{4,1 \cdot 10^{16}} = 7,3 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 1,5''.$$

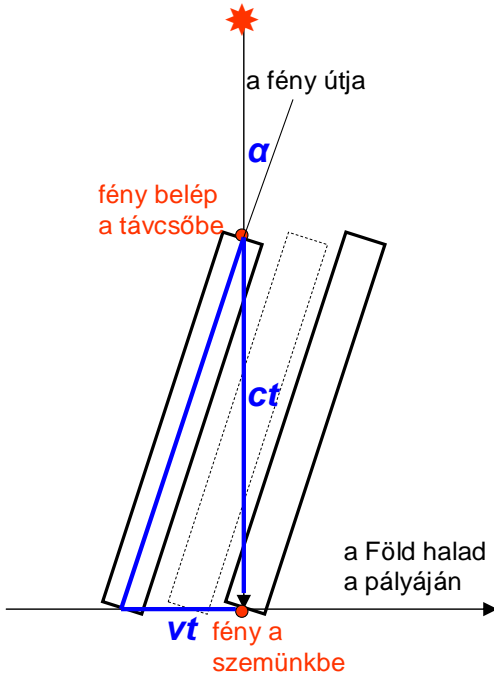
(b) $0,02^\circ = 72''$, ez kb 50-szeres évi elmozdulás, az α Centauri kb. 50-szer messzebb van.

2.7 (a) $40'' = 1,9 \cdot 10^{-4}$ rad

A földpálya átmérője látszik $40''$ -es szögben:

$$d = \frac{2 \cdot 1,5 \cdot 10^{11}}{1,9 \cdot 10^{-4}} = 1,5 \cdot 10^{15} \text{ m} = 0,16 \text{ fényév}$$

(b) Ha a Föld v sebességgel halad a pályáján, és a távcső hosszán t idő alatt halad végig a fény, akkor ezalatt a Föld vt utat tesz meg.



A távcsövet úgy kell irányítani, hogy a teteje t idővel korábban legyen a fejünk felett, mint amikor a fény a szemünkbe megérkezik.

Mivel a Föld 30 km/s sebességgel kering a Nap körül, és a fény (Bradley idején már ismert) sebessége $300\,000 \text{ km/s}$,

$$\tan \alpha = \frac{vt}{ct} = \frac{v}{c} = \frac{30}{300000} = 1,0 \cdot 10^{-4}$$

$$\alpha = 20,6 \text{ szögmásodperc}$$

(c) $2\alpha = 41$ szögmásodperc, összhangban a megfigyelt $40''$ körüli értékkel.

Megjegyzés:

1. Ha a csillagok éves parallaxisát nem is sikerült még észlelni, ez a ± 20 másodperces (aberrációnak nevezett) ingadozás majdnem 200 évvel Kopernikusz után végre kísérleti igazolást szolgáltatott a Föld keringésére, a geocentrikus elmélettel nem volt magyarázható.
2. Mivel ez az ingadozás minden egyéb megfigyelt mozgásra ráakódik, nagyobb pontosság igénye esetén mindig korrekcióra van szükség.

2.8 (a) A 61 Cygni nem a földpálya síkjára merőleges irányban van, a maximális $40''$ -es ingadozás csak a csillag irányára merőlegesen haladó Föld esetében lép fel. Más irányból a merőleges sebességkomponens ennél kisebb.

(b) Az aberráció ugyanolyan mértékű a 61 Cygni, mint a közelében látható többi csillag esetében. Ha a 61 Cygni pozícióját valamelyik "mellette" látható csillaghoz képest vizsgáljuk, megkapjuk a kék görbét.

(c) A grafikonra illesztett szinuszcörbe körülbelül $18,30$ és $18,80$ szögmásodperc között oszcillál, az amplitúdó tehát $0,25''$.

A 61 Cygni távolsága

$$d = \frac{1}{p} = 4,0 \text{ pc} = 13 \text{ fényév}$$

Megjegyzés:

Bessel $0,31$ szögmásodpercet kapott, a legmodernebb technikával kapott érték $0,287''$. Bessel eredménye igen bravúrosnak tekinthető, hiszen távcsőve objektívjének átmérője mindössze 158 mm volt, így a csillagok majdnem $1''$ átmérőjű korongokként jelentek meg a látómezőben.

3. Függvénykapcsolatok vizsgálata

LINEÁRIS KÖZELÍTÉS

3.1 Ismert, hogy a Föld tengelyforgási periódusa 24 óra, pontosabban 23 óra, 56 perc és 4 másodperc. Nem mindig volt ennyi: a következő táblázat mutatja, hogy tengeri üledékek vizsgálata alapján melyik földtörténeti korszakban hány nap volt egy évben, azaz egy Nap körüli keringés során hányat fordult a Föld a saját tengelye körül. (Feltételezhetjük, hogy a Nap körüli keringés periódusa eközben nem változott.)

Földtörténeti idő	Hány millió éve	Napok száma egy évben	A nap hossza (óra)	Különbség (óra)
jelenleg	0	365		
kréta	70	370		
triász	220	372		
perm	290	383		
kora karbon	340	398		
késő devon	380	399		
középső devon	395	405		
kora devon	410	410		
késő szilur	420	400		
középső szilur	430	413		
kora szilur	440	421		
késő ordovicium	450	414		
középső kambrium	510	424		
késő proterozoikum	600	417		
késő proterozoikum	900	486		

<http://spacemath.gsfc.nasa.gov>

- (a) Számítsd ki, hány órával volt a mainál rövidebb a nap az egyes korszakokban.
- (b) Ábrázold az adatokat az eltelt idő függvényében, illessz a pontokra egyenest, és határozd meg, átlagosan hány másodperccel nőtt a nap hossza évszázadonként.
- (c) Az árapály-súrlódás miatt a távoli jövőben mind a holdhónap, mind a földi nap időtartama 47 jelenlegi nap lesz. Mekkora lesz ekkor a Föld–Hold távolság?
- (d) Használhatjuk-e a (b) feladatban kapott eredményt annak megállapítására, hogy ez nagyjából mikor fog bekövetkezni?

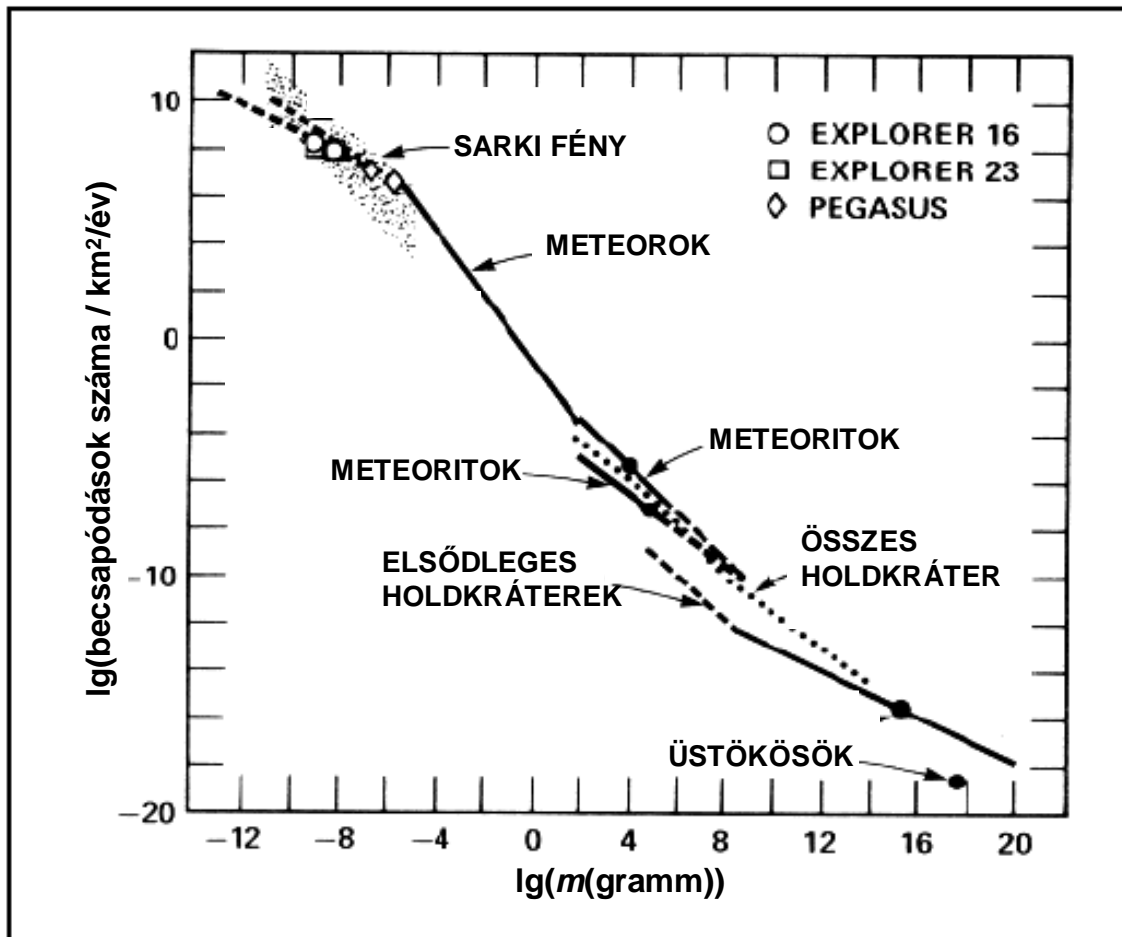
3.2 A bolygóközi tér nem teljesen üres, sok minden van benne: aszteroidák darabjai, üstökösök, a bolygókeletkezésből visszamaradt anyag, stb. Bolygónk felszínére is záporoznak a kődarabok és törmelékek, akár több tíz km/s sebességgel. Az alábbi ábra azt mutatja, milyen méretű testekből évente mennyi jut 1 km² területre. Az ábra mindkét tengelyén logaritmikus a skála, hiszen mind a tömeg, mind a darabszám sok nagyságrendnyi tartományban változik.

- (a) Egy 3 g/cm³ sűrűségű (gömbnek tekintett) meteoroid átmérője 4 cm. Mekkora a tömege?
- (b) Hány ilyen éri a Földet 10 000 km² területen?
- (c) Közelítsük egyenessel a grafikon 1 grammtól 10²⁰ grammig terjedő tartományát.

A következő két kérdés integrálási feladatra vezet.

(d) Mekkora az évente becsapódó meteoritszám az m körüli dm tömegintervallumban?

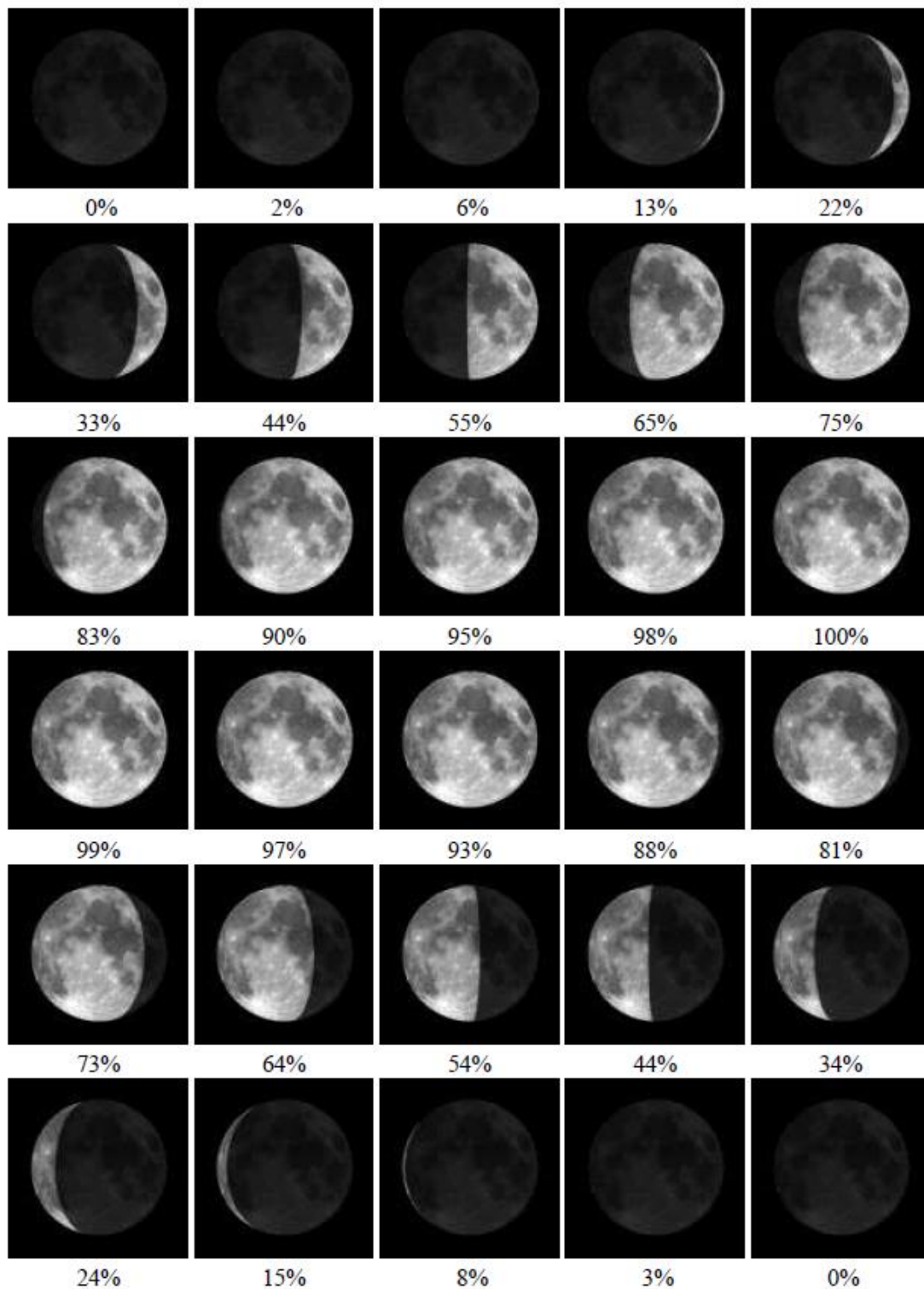
(e) Évente hány tonna anyag csapódik a Föld teljes felszínének az 1 grammtól 10^{20} grammig terjedő tartományban?



<http://spacemath.gsfc.nasa.gov>

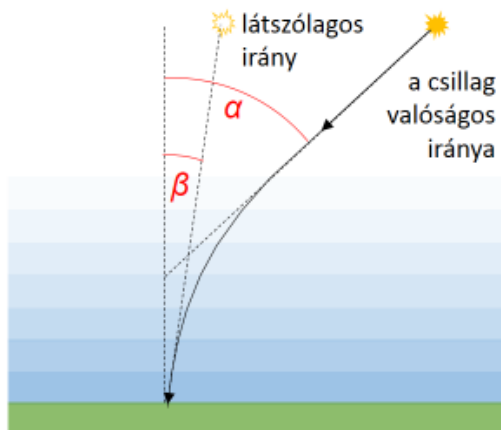
3. Függvénykapcsolatok vizsgálata NEMLINEÁRIS ÖSSZEFÜGGÉSEK

3.3 Az egy holdhónapon keresztül naponta készített képek azt mutatják, hogy a Hold tányérjának hány százaléka volt megvilágítva. Ábrázold a megvilágított területet az idő függvényében. Milyen függvényt kaptál? Magyarázd meg az eredményt.



3.4 A légkör különböző sűrűségű rétegeinek más az optikai törésmutatója, ezért a szemünkbe vagy távcsövünkbe érkező fény iránya eltér a megfigyelt égitest valóságos irányától.

(a) Ha a talajszinten a levegő törésmutatója 1,000292, és egy csillagot a zenittől $13^{\circ}37'52''$ szögtávolságra észlelünk, mekkora szögtávolságra van a zenittől valójában?



(b) A t °C hőmérsékletű és p bar nyomású levegő törésmutatójának kiszámítására alkalmazható az alábbi összefüggés:

$$n = 1 + 0.000292 \cdot \frac{p}{1,014} \cdot \frac{273}{273 + t}$$

Mennyivel változik meg a fenti csillag látszólagos helyzete és milyen irányban, ha a hőmérséklet 0°C -ról 15°C -ra emelkedik, a nyomás pedig 1014 hPa-ról 1010 hPa-ra csökken?

(c) Ábrázoljuk a zenittávolságnak a fenti rajz alapján kapott $\delta = \alpha - \beta$ látszólagos eltolódását az α valóságos zenittávolság függvényében.

(d) A fenti rajz alapján kapott összefüggés a gyakorlatban csak kis szögekre használható (a grafikon kezdeti, lineárishoz közeli szakaszán). Nagy szögekre (vagyis ha a vizsgált objektum a horizont közelében van) ugyan valóban egyre gyorsabban nő az eltérés, ezért is látjuk „lapítottnak” a Napot vagy a Holdat a horizont közelében, de az összefüggést leíró képlet az itt kapottnál bonyolultabb.

Nagy zenittávolságokra miért nem ad helyes eredményt a fenti rajz alapján kapott összefüggés?



<http://www.atoptics.co.uk/atoptics>

Megoldás 3.

3.1 (a)

eltelt idő (millió év)	napok száma egy évben	a nap hossza (óra)	különbség (óra)
0	365	24,0	0,0
70	370	23,7	0,3
220	372	23,5	0,5
290	383	22,9	1,1
340	398	22,0	2,0
380	399	22,0	2,0
395	405	21,6	2,4
410	410	21,4	2,6
420	400	21,9	2,1
430	413	21,2	2,8
440	421	20,8	3,2
450	414	21,2	2,8
510	424	20,7	3,3
600	417	21,0	3,0
900	486	18,0	6,0

(b) A grafikon meredeksége 0,006 óra / millió év
 $= 6 \cdot 10^{-7}$ óra / 100 év = 2 ms/évszázad

(c) A Föld tömege 81-szer akkora, mint a Holdé. A rendszer tömegközéppontja a tömegekkel fordított arányban osztja a távolságot. Ha a keresett távolság $82d$, akkor a tömegek M és $M/81$, a pályasugarak d , illetve $81d$.

$$\frac{\gamma M \cdot (M/81)}{(82d)^2} = M \cdot d \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\frac{\gamma(M/81)}{82^2 \cdot d^2} = d \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$d^3 = \frac{\gamma(M/81) \cdot T^2}{82^2 \cdot 4\pi^2}$$

$$82d = \sqrt[3]{\frac{82 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,0 \cdot 10^{24} \cdot (47 \cdot 24 \cdot 3600)^2}{81 \cdot 4\pi^2}}$$

$$82d = 5,5 \cdot 10^8 \text{ m}$$

(azaz valamivel kevesebb, mint a jelenlegi távolság másfélszerese).

Vagy: Kepler III. törvényéből

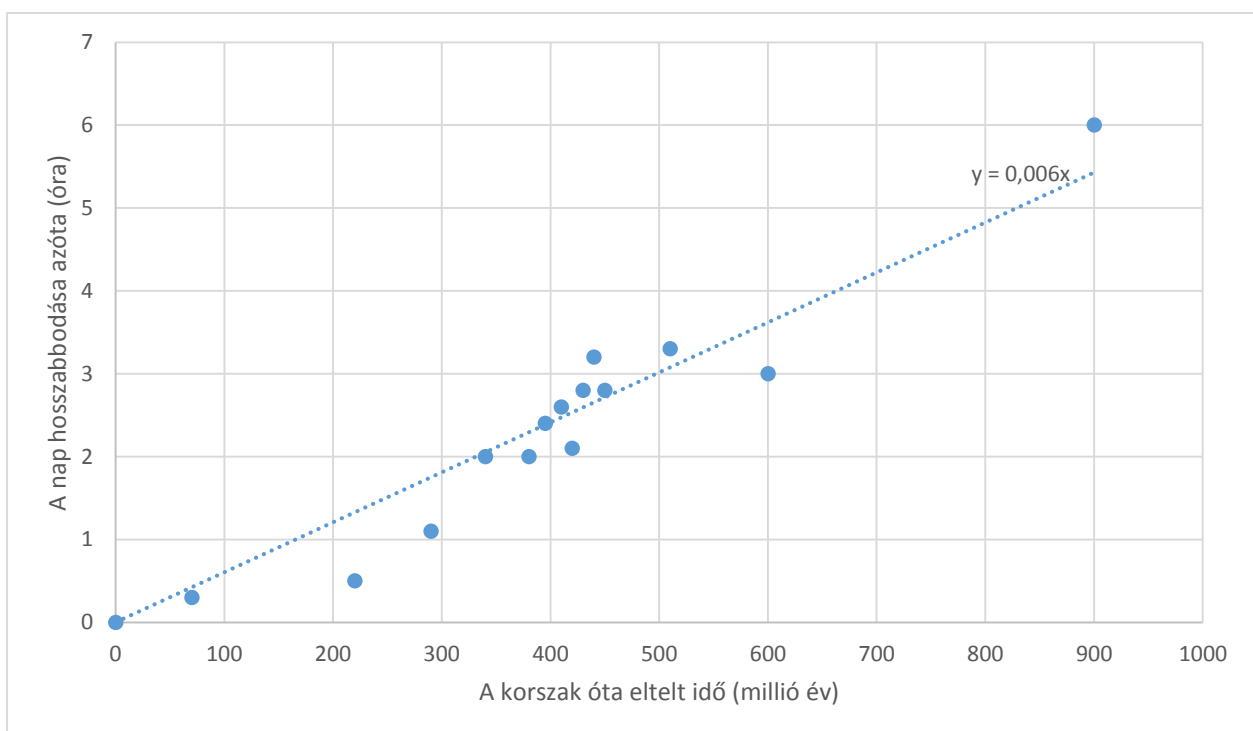
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma(M + M/81)}{4\pi^2}$$

$$a^3 = \frac{82\gamma MT^2}{81 \cdot 4\pi^2}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{82 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,0 \cdot 10^{24} \cdot (47 \cdot 24 \cdot 3600)^2}{81 \cdot 4\pi^2}}$$

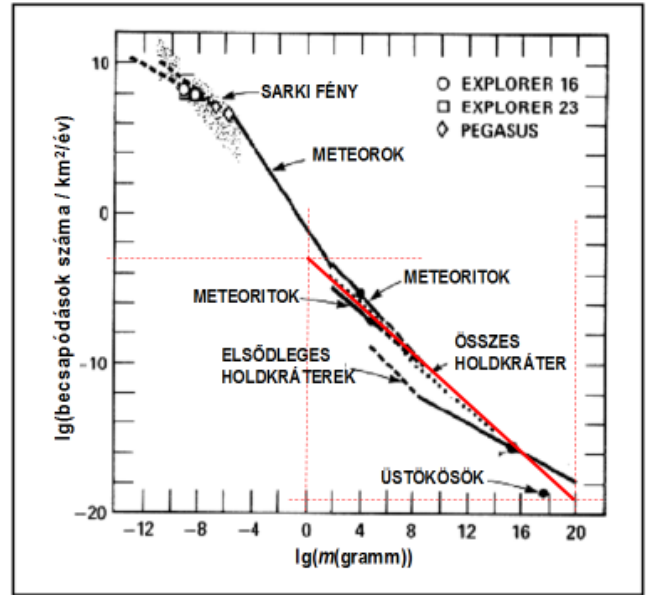
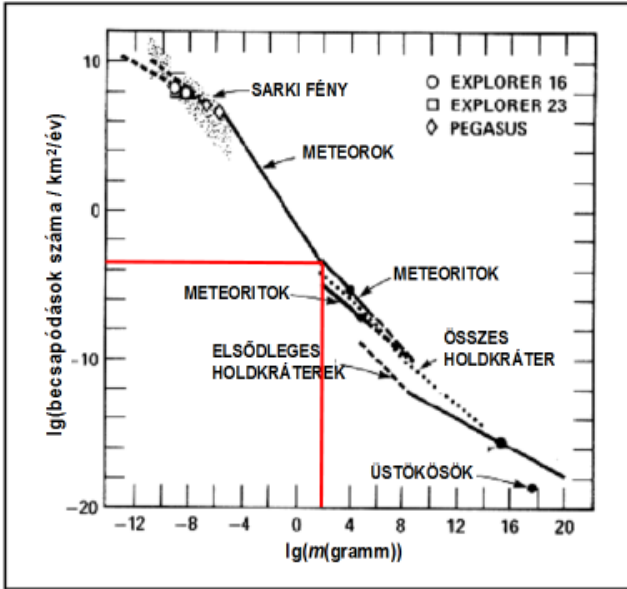
$$a = 5,5 \cdot 10^8 \text{ m.}$$

(d) Nem. Noha a grafikonon ábrázolt idősort az egyszerűség végett lineáris függvénnyel közelítettük, nincs okunk azt feltételezni, hogy az összefüggés valóban lineáris lenne. A 47 órás napot úgy kell elképzelnünk, végtelen távoli időben ehhez a (határ)értékhez közelít a nap hosszúsága.



3.2. (a) $m = \rho \cdot V = \frac{4}{3} \rho \pi \cdot r^3 =$
 $= \frac{4}{3} \cdot 3000 \cdot \pi \cdot 0,02^3 = 0,1\text{kg} = 1 \cdot 10^2 \text{g}$

(b) A grafikonról leolvassa a gyakoriság kb. $10^{-3,5} \approx 0,00032$ per km^2 per év, vagyis $10\,000 \text{ km}^2$ -enként kb. évi 3 becsapódás.



(c) Durva lineáris közelítést alkalmazva a meredekség $-0,8$ és a tengelymetszet kb. -3 .

A grafikon egyenlete

$$\lg N = -0,8 \lg m - 3$$

(d) Évente becsapódó meteoritszám az m körüli dm tömegintervallumban:

$$N(m) = 0,001 \cdot m^{-0,8} dm.$$

(e) A felületegységre eső teljes becsapódó tömeg

$$M = \int_1^{10^{20}} 0,001 \cdot m^{-0,8} dm = \left[0,001 \cdot \frac{1}{0,2} m^{0,2} \right]_1^{10^{20}} =$$

$$= 0,005 \left((10^{20})^{0,2} - 1^{0,2} \right) =$$

$$= 0,005(10000 - 1) \approx 50 \text{g} / \text{km}^2 / \text{év}$$

A Föld felszíne $4\pi R^2 = 4\pi \cdot 6400^2 \approx 5 \cdot 10^8 \text{ km}^2$.

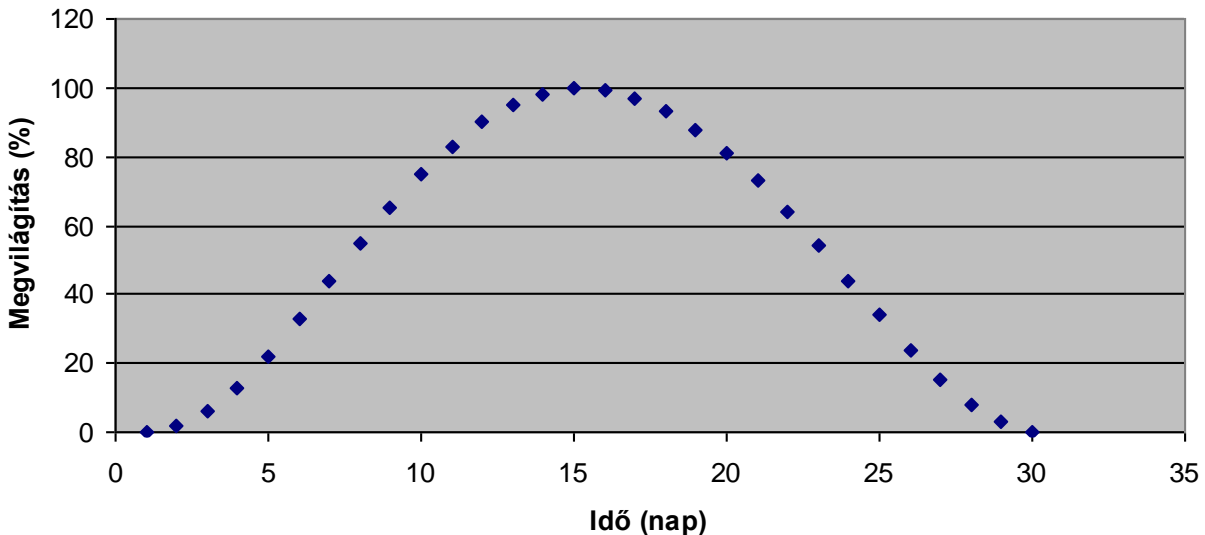
Így a teljes becsapódó meteorittömeg

$$5 \cdot 10^8 \text{ km}^2 \cdot 50 \text{g} = 3 \cdot 10^{10} \text{g} = 30000 \text{tonna}$$

Megjegyzés:

A becslés igen érzékeny az illesztett egyenesre és az integrálási határookra. $20\,000$ és $100\,000$ tonna közötti értékeket tartanak lehetségesnek.

3.3



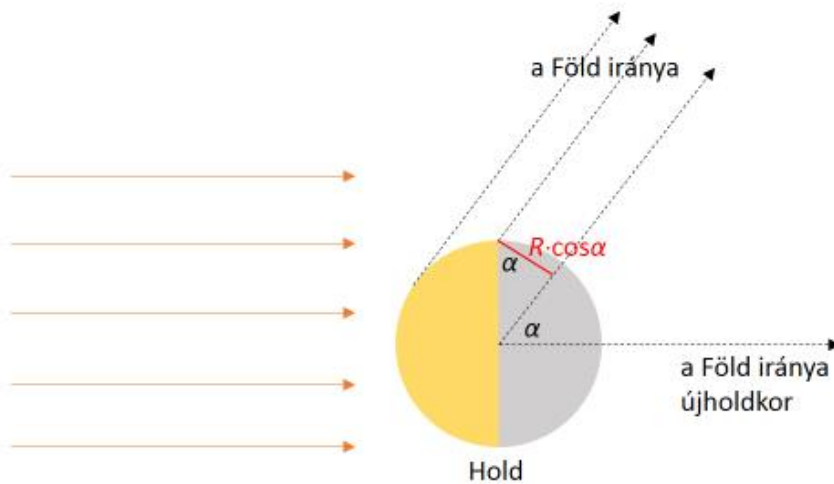
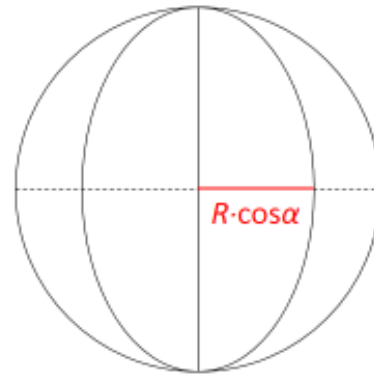
Színuszgörbe alakú grafikont kaptunk.

Magyarázat:

Ha újholdtól számítva a keringő Hold szögelfordulása (a Földről nézve) α , akkor a holdsarló területét úgy kapjuk, hogy a félholdból kivonjuk a $\cos\alpha$ arányú összenyomással kapott félellipszis területét (ez területnövelést jelent, amikor α tompaszög):

$$\frac{R^2\pi}{2} - \frac{R \cdot R \cos\alpha \cdot \pi}{2} =$$

$$R^2\pi \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{2} = R^2\pi \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$



3.4 (a) Ha n_0 a törésmutató a légkör alján, és a légkört N db rétegből állónak képzeljük, melyek törésmutatója rendre $n_0, n_1, n_2, \dots, n_N = 1$ (ez már az üres tér), akkor a törési törvényt alkalmazva

$$\sin \beta = \sin \alpha \cdot \frac{n_N}{n_{N-1}} \cdot \dots \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{n_1}{n_0} = \sin \alpha \cdot \frac{1}{n_0}$$

$$\sin \alpha = n_0 \cdot \sin \beta = 1,000292 \cdot \sin \beta$$

$$\alpha = 13^\circ 38' 7''.$$

Megjegyzés:

Ez a néhány szögmásodperces eltolódás csekélynek tűnik, de csillagászati méréseknél ennél nagyobb pontosságokra van szükség, ezért figyelembe kell venni a légköri fénytörést (refrakciót).

(b) A kezdeti törésmutató 1,000292.

A megváltozott törésmutató

$$n = 1 + 0,000292 \cdot \frac{1,010}{1,014} \cdot \frac{273}{273 + 15} = 1,000276.$$

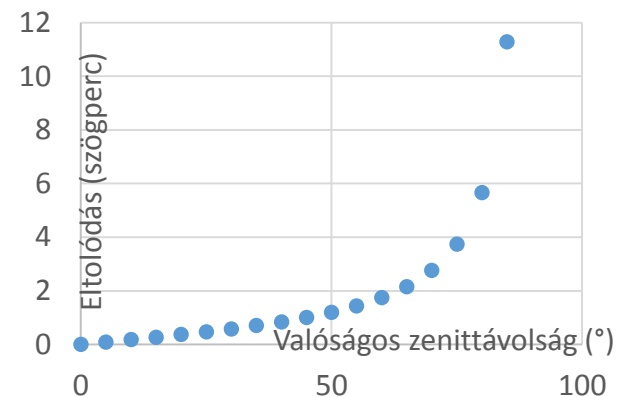
$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{\sin \alpha}{1,000276}$$

$$\beta = 13^\circ 37' 53''.$$

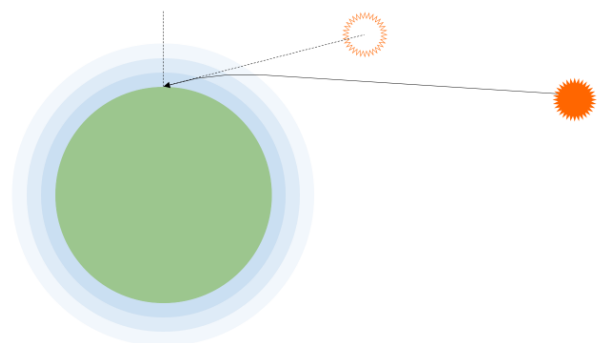
Körülbelül 1 másodperccel távolabb látszik a csillag a zenittől, mint eddig.

$$(c) \delta = \alpha - \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right),$$

A következő grafikont kapjuk:



(d) A horizont-közeli irányból érkező fénysugár útját nem tekinthetjük úgy, mintha párhuzamos sík törőfelületeken haladt volna át:



4. A fizika különböző fejezeteiben tanultak összekapcsolása

BEVEZETŐ FELADATOK

4.1 *Utazás a Holdba* című regényében (1865) *Jules Verne* úgy képzelte el a holdutazást, hogy az űrhajósok egy hatalmas ágyúból kilőtt lövedék belsejében foglalnak helyet.

(a) A légellenállást, a Föld forgását és a Hold keringését elhanyagolva milyen sebességgel kellene kilőni egy ilyen ágyúlövedéket, hogy eljuthasson a Holdra?

(b) Tegyük fel, hogy a lövedék tömege 2000 kg. Ha egy tonna TNT felrobbantásakor 4700 MJ energia szabadul fel, hány tonna TNT kellene ennek az ágyúnak az elsütéséhez?

(c) Ha az elképzelt ágyú csöve 500 méter hosszú, mekkora gyorsulást kellene az utazóknak elviselniük?

4.2 (a) Mennyire kell felgyorsulnia a Nap felszínén kidobódó anyagnak, hogy elhagyja a Napot?

(b) A fehér törpe csillagok sűrűsége 10^9 kg/m^3 nagyságrendű. Mekkora a szökési sebesség egy Nappal megegyező tömegű fehér törpe felszínén?

A bolygóközi térből egy kezdetben nyugvónak tekinthető meteoroid (kődarab) érkezik a Naprendszerbe.

(c) A meteoroid a Nap gravitációs vonzása hatására egyenes pályán zuhanni kezd a Nap felé. Mekkora sebességgel érkezik a Nap felszínére?

(d) Mekkora sebességre gyorsul fel, ha parabolapályáján érkezik, és pályájának napközeli pontja a Föld távolságában található? (Hanyagoljuk el a Föld és a többi bolygó hatását.)

(e) Mekkora sebességgel csapódik a Föld légkörébe ha „szemből”, illetve, ha „hátról” ütközik bele?

4.3 (a) A Tejútrendszer átmérője kb. 30 kpc ($1 \text{ pc} = 3,26 \text{ fényév}$). A 760 Mpc távolságra levő Abell 2218 galaxishalmaz szögátmérője 9,0 szögperc. Hányszor akkora az átmérője, mint a Tejútrendszeré?

(b) A galaxishalmazt lefényképezve megállapítjuk, hogy körülbelül 120 galaxisból áll, amelyek hasonlóak a mi Tejútrendszerünkhöz. Becsüld meg a halmazban levő látható anyag tömegét.

(c) Méréseink szerint az egyik galaxis, mely a halmaz középpontjától 1000 kpc távolságra található, a halmaz középpontjához képest 950 km/s sebességgel mozog. Elhagyhatná-e ez a galaxis a halmazt, ha a halmazban csak látható tömeg lenne?

(d) Más mérések alapján arra a következtetésre jutunk, hogy a galaxis nem szabadulhat el a halmaz gravitációs mezejéből, a 950 km/s sebesség a halmaz középpontja körüli keringési sebességnek tekinthető. Ez alapján mekkora a halmaz össztömege?

4. A fizika különböző fejezeteiben tanultak összekapcsolása

GÁZOK GRAVITÁCIÓS TÉRBEN

4.4 (a) Adjunk becslést egy légköri oxigénmolekula átlagos sebességére, és hasonlítsuk össze a szökési sebességgel.

(b) Mi a helyzet hidrogénmolekula esetén?

(c) A Marson a nappalok és éjszakák váltakozása miatt a hőmérséklet -83°C és -33°C között ingadozik. A Mars légkörében megmaradhat-e tartósan a szén-dioxid?

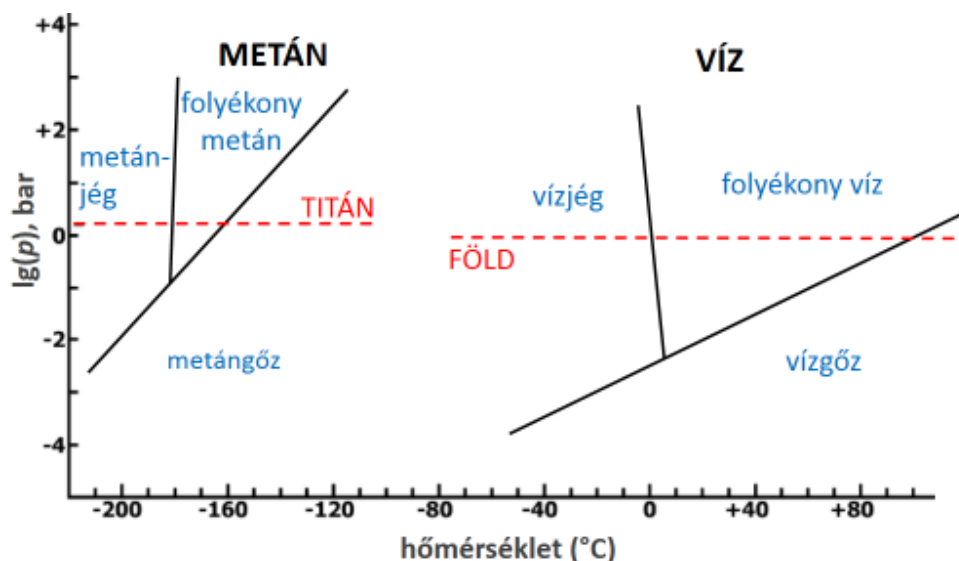
(d) A Merkúrnak gyakorlatilag nincs légköre. Tegyük fel, hogy egy gázmolekula átlagos sebessége legfeljebb a szökési sebesség tizede lehet, különben a gáz évmilliók során elillan a bolygóról. Feltételezve, hogy a Merkúr nappali oldalán 620 K középhőmérséklet uralkodik, mekkora moláris tömegű gázokat tudna megtartani, ha lenne légköre?

4.5 (a) A Naprendszerben a Szaturnusz Titán nevű holdja az egyetlen hold, amely jelentős légkörrel rendelkezik. A Titán tömege $1,34 \cdot 10^{23}$ kg. Mekkora moláris tömegű gázok maradhatnak meg a Titán légkörében, ha feltételezzük, hogy egy gázmolekula átlagos sebessége legfeljebb a szökési sebesség tizede lehet, különben a gáz évmilliók során elillan a bolygóról? Azt is tételezzük fel, hogy a Titánon ugyanannyi a hőmérséklet, mint a Szaturnuszon: körülbelül 95 K.

(b) A Titán 95 K körüli átlaghőmérséklete a mi életformánk számára nyilvánvalóan nem lakható. Egyes elképzelések szerint mégis nyújthat némi útmutatást az élet keletkezését kutatók számára. A Titánnak ugyanis túlnyomórészt nitrogénből álló légköre van, de jelentős mennyiségben tartalmaz metánt is. Űrszondák mérései szerint a Titán légköre számos rétegből áll (van UV-sugárzást elnyelő réteg is), a legalsó rétegben metánfelhők vannak.

Az alábbi ábrán a metán, illetve a víz úgynevezett fázisdiagramja látható, feltüntetve rajta a Titánon, illetve a Földön uralkodó légnyomást.

Miért gondolhatják, hogy a Titánon hasonló szerepet játszhat a metán, mint a Földön a víz?



(c) A Titán sugara 2600 km, a légkör vastagsága a sugárhoz képest kicsi. Durva közelítéssel tekintsük a légkört egyenletes sűrűségűnek. A felszíni légnyomást kétféleképpen kifejezve adjunk becslést a légkör vastagságára.

4.6 A Föld légkörének vastagsága több, mint 100 km, míg a Chandra röntgenteleszkóp által felfedezett Cassiopeia-A nevű neutroncsillagé csak néhány cm. Hogyan lehet egy kicsi bolygónak vastagabb légköre, mint egy ilyen nagy tömegű objektumnak?

Ha a hőmérsékletet állandónak tekinthetjük, a hidrosztatikus egyensúlyban levő légkör nyomása és sűrűsége az úgynevezett barometrikus magasságformula szerint exponenciálisan csökken a magassággal:

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{h}{H}},$$

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{h}{H}}.$$

H az úgynevezett skálamagasság: az a magasságkülönbség, amely mellett a sűrűség e -adrészére csökken. A skálamagasság értéke

$$H = \frac{kT}{mg},$$

ahol T az abszolút hőmérséklet, m a légkört alkotó részecskék átlagos tömege, és k a Boltzmann-állandó.

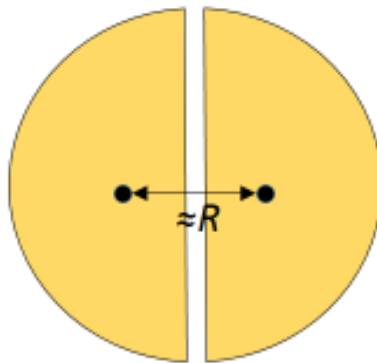
(a) A neutroncsillag felszínén a nehézségi gyorsulás 100 milliárdszor annyi, mint a Földön. A hőmérséklet 3 millió K, míg a földön csak átlagosan 240 K. A földi légkör nitrogén és oxigén keveréke, átlagosan 29 g/mol, míg a neutroncsillag légköre szénből áll (12 g/mol).

Mekkora a skálamagasság a Földön, illetve a neutroncsillagon?

(b) A felszíntől mekkora távolságnyira csökken a sűrűség a felszíni érték milliomod részére a Földön, illetve a neutroncsillagon?

4.7 A Nap stabil csillag: hatalmas tömege nem zuhan a középpont felé a gravitáció hatására, és a belső nyomás sem veti szét. A gravitációs és a nyomásból származó erők egyensúlyban vannak. Adjunk durva (nagyságrendi) becslést a Nap belsejében uralkodó hőmérsékletre.

Ehhez gondolatban vágjuk félbe a Napot. A két fél Nap tömegközéppontjának távolságát a Nap sugarával közelíthetjük:



(a) A részek tömegét a tömegközéppontokba képzelve, mekkora gravitációs vonzást gyakorol egymásra a két fél Nap?

(b) Mennyi a részeket elválasztó felületre kifejtett átlagos gravitációs nyomás?

(c) A gravitációs nyomással a gáz nyomásából és a kifelé áramló fotonok sugárnyomásából összetevődő nyomás tart egyensúlyt. A Naphoz hasonló tömegű csillagok esetében a gáznyomás dominál, csak ezzel foglalkozunk. A Napot egyenletes sűrűségű ideális gázgömbnek tekintve, fejezd ki az ideális gáz nyomását a sűrűség, a móltömeg és a hőmérséklet függvényében.

(d) A gázt hidrogénmagok (protonok), elektronok és héliummagok alkotják. Tekintsük az átlagos móltömeget 0,75 grammnak. Nagyságrendileg mekkora a hőmérséklet a Nap belsejében?

4. A fizika különböző fejezeteiben tanultak összekapcsolása

SUGÁRNYOMÁS

4.8 A Nap sugárzásának intenzitása a Föld távolságában $S = 1370 \text{ W/m}^2$ (napállandó).

(a) Mennyi a napsugárzás irányára merőleges 1 m^2 felületre 1 másodperc alatt beeső fotonok összes lendülete?

(b) Mekkora a Nap sugárzásának nyomása a Föld távolságában levő merőleges felületre, ha feltételezzük, hogy minden foton elnyelődik?

(c) Mekkora a Nap sugárzásának nyomása a Föld távolságában levő merőleges felületre, ha feltételezzük, hogy minden foton visszaverődik?

4.9 (a) Mekkora a Nap sugárnyomása által a Földre kifejtett erő?

(b) Hasonlítsd össze a Nap által a Földre gyakorolt gravitációs erővel.

(c) A Föld távolságában mekkora annak a Föld sűrűségű testnek a mérete, amelyre a Nap sugárnyomása azonos nagyságrendű a gravitációs vonzással?

(d) Mutasd meg, hogy adott méret esetén a két erő hányadosa független a naptávolságtól.

4.10 Az üstökösök porcsóvája az üstökös kómáját alkotó mikroszkopikus porszemcsékből jön létre a napfény sugárnyomásának hatására. (A képen a szélesebb, fehéres fényű csóva.)



<https://courses.lumenlearning.com/astronomy/> A Hale-Bopp üstökös

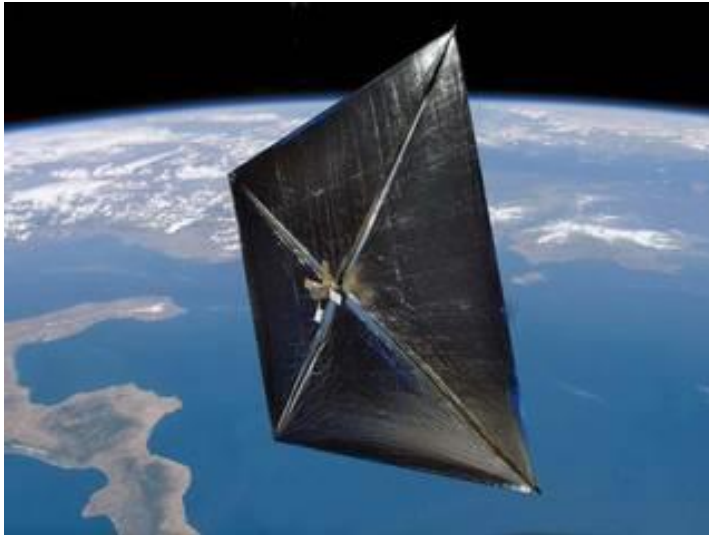
A Halley-üstökös legutóbb 1986. február 9-én járt napközeli, a Naptól $9,0 \cdot 10^{10} \text{ m}$ távolságra.

(a) Mekkora sugárnyomást gyakorolt rá ekkor a Nap, ha durva közelítésként az egyszerűség végett az üstökös által visszavert fényt elhanyagoljuk?

(b) Hasonlítsd össze a Nap sugárnyomása, illetve gravitációja által az üstökös porcsóvájában található porszemcsére gyakorolt erőket, ha a szemcse sűrűsége 2000 kg/m^3 , és alakja $0,5 \text{ }\mu\text{m}$ átmérőjű gömbbel közelíthető.

4.11 A sugárnyomás segítségével űreszközöket is lehet gyorsítani, üzemanyag felhasználása nélkül. Erre szolgálhat az úgynevezett napvitorla, amelynek működőképességét már sikeres kísérletek bizonyították. (Elsőként 2010-ben, a Vénuszhoz utazó japán IKAROSZ műhold.)

A NASA civil támogatással is megerősített LightSail programjának keretében különböző kutatási célokat szolgáló, mindössze 5 kg tömegű műholdak (CubeSat) Föld körüli pályára állítására alkalmaznak napvitorlákat. A vitorla vékony fényvisszaverő Mylar fóliából áll, hasznos területe 32 m^2 .



https://www.nasa.gov/mission_pages/tm/solarsail/index.html

Az alábbi képen a Nemzetközi Űrállomásról kibocsátott két CubeSat műhold látható. A vitorlák csak akkor nyílnak ki, amikor a műhold kellő távolságra jutott az űrállomástól.



https://phys.libretexts.org/TextBooks_and_TextMaps/University_Physics/

- Számítsd ki a CubeSat műholdnak a napfény sugárnyomása által okozott gyorsulását.
- Mekkora sebességre tenne szert egy űreszköz, ha egy évig ekkora gyorsulással haladna?

Megoldás 4.

4.1 (a) A Földet és a Holdat nyugvó ponttömegeknek tekintve, a lövedéknek azon a ponton kell átjutnia, ahol a Föld és a Hold eredő gravitációs tere zérus, onnan már a Hold felé gyorsul. A Hold tömege kb 1/81-edrésze a Föld tömegének, ezért ez a pont a középpontok távolságának (Hold felőli) tizedelőpontjában van. Ha a Hold távolsága $r = 380\,000$ km, akkor (induláskor a Hold vonzását elhanyagolva)

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma mM}{R} = 0 - \frac{\gamma mM}{0,9r} - \frac{\gamma mM}{81 \cdot 0,1r}$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{\gamma M}{R} - \frac{\gamma M}{r} \left(\frac{1}{0,9} + \frac{1}{81} \right)$$

$$v^2 = 2\gamma M \left(\frac{1}{R} - \frac{100}{81r} \right) =$$

$$= 2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,0 \cdot 10^{24} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{6,4 \cdot 10^6} - \frac{100}{81 \cdot 3,8 \cdot 10^8} \right)$$

$$v = 1,1 \cdot 10^4 \text{ m/s.}$$

(Ekkora pontosság mellett ugyanennyit kapunk akkor is, ha a Hold gravitációját teljesen elhanyagoljuk, hiszen ez a szökési sebesség ismert értéke.)

(b) $\frac{1}{2}mv^2 = 1,2 \cdot 10^{11} \text{ J}$, ez 26 tonna TNT-nek felel meg.

(c) $v^2 = 2as$

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{(1,1 \cdot 10^4)^2}{2 \cdot 500} = 1,2 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2 = 12000g$$

4.2 (a) $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma mM}{R} = 0 + 0$

$$\text{A szökési sebesség } v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{6,96 \cdot 10^8}} = 618 \text{ km/s.}$$

(b) $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$

$$\frac{R}{M} = \left(\frac{3}{4\pi\rho M^2} \right)^{1/3}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = \sqrt{2\gamma \cdot \left(\frac{4\pi\rho M^2}{3} \right)^{1/3}}$$

$$v = \sqrt{2 \cdot 6,7 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{4\pi \cdot 10^9 \cdot (2 \cdot 10^{30})^2}{3} \right)^{1/3}}$$

$$v = 6000 \text{ km/s}$$

(c) Ugyanakkorával, mint a Nap felszínén jellemző szökési sebesség:

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,0 \cdot 10^{30}}{7,0 \cdot 10^8}} =$$

$$= 6,2 \cdot 10^5 \text{ m/s} = 620 \text{ km/s}$$

(d) $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma mM}{r} = 0 + 0$

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{1,5 \cdot 10^{11}}} =$$

$$= 42 \text{ km/s.}$$

(e) A Föld sebessége a pályáján kb. 30 km/s. Szemből tehát 72 km/s, hátulról 12 km/s a becsapódási sebesség.

4.3 (a) $9,0^\circ = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$,

$$760 \text{ Mpc} = 7,6 \cdot 10^5 \text{ kpc.}$$

A halmaz mérete

$$D = d \cdot \alpha = 7,6 \cdot 10^5 \cdot 2,6 \cdot 10^{-3} = 2000 \text{ kpc}$$

Ez a Tejútrendszer átmérőjének kb. 70-szerese.

(b) A Tejútrendszer kb. 100 milliárd csillagból áll. A Nap (átlagos csillag) tömege $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$,

így 120 db ilyen galaxis össztömege

$$120 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{30} = 2,4 \cdot 10^{43} \text{ kg}$$

(c) A galaxis a halmaz peremén található. Feltételezve, hogy a halmaz gömbszimmetrikus, a szökési sebesség

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 2,4 \cdot 10^{43}}{1000 \cdot 3,1 \cdot 10^{19}}} = 320 \text{ km/s}$$

A galaxis sebessége ennél lényegesen több, elszabadulhatna.

(d) A galaxis a halmaz peremén található, így a pályasugarán belül található tömeg gyakorlatilag a galaxis össztömege.

$$\frac{v^2}{R} = \frac{\gamma M}{R^2}$$

$$M = \frac{v^2 R}{\gamma} = \frac{(9,5 \cdot 10^5)^2 \cdot 1000 \cdot 3,1 \cdot 10^{19}}{6,7 \cdot 10^{-11}}$$

$$M = 4,2 \cdot 10^{44} \text{ kg}$$

(körülbelül 20-szorosa a látható tömegnek).

4.4 (a) A kinetikus gázelmélet szerint T hőmérsékleten a molekulák átlagos mozgási energiája

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT.$$

Az átlaghőmérsékletet 10°C -nak tekintve

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 283}{0,032 / 6 \cdot 10^{23}}} = \\ = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 6 \cdot 283}{0,032}} = 470 \text{ m/s}$$

A Föld felszínén a szökési sebesség

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \\ = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,0 \cdot 10^{24}}{6,4 \cdot 10^6}} = 11 \text{ km/s}$$

Az oxigénmolekula sebessége ennek kb. 4%-a, kevés molekula mozog elég gyorsan ahhoz, hogy elszökessen, a Föld meg tudja tartani légkörében az oxigént.

(b) A hidrogénmolekula tömege 16-odrésze az oxigénmolekuláénak, sebessége tehát 4-szer akkora, a szökési sebességnek kb. hatodrésze: a légkörbe kerülő hidrogén lassan elszökik.

(c) A Marson a szökési sebesség $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} =$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{3,40 \cdot 10^6}} = 5,02 \text{ km/s}$$

A széndioxid moláris tömege 44,0 gramm. A felső hőmérséklet $T = 240 \text{ K}$. A széndioxidmolekula négyzetes közepsebessége

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 240}{0,0440 / 6,02 \cdot 10^{23}}} = \\ = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 6,02 \cdot 240}{0,0440}} = 369 \text{ m/s}$$

Kevesebb, mint a szökési sebesség tizede, tartósan megmaradhat a széndioxid. (A Mars légköre főleg széndioxidból áll.)

(d) $\sqrt{\frac{3kT}{m}} < 0,1 \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

$$100 \cdot \frac{3kT}{m} < \frac{2GM}{R}$$

$$m > \frac{150kTR}{GM}$$

$$= \frac{150 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 620 \cdot 2,4 \cdot 10^6}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3,3 \cdot 10^{23}} = 1,4 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$$

Ez 84 g moláris tömegnek felel meg. Legalább ekkora moláris tömegű légköri gázokat tudna megtartani a Merkúr.

Megjegyzés:

Kis tömege és magas felszíni hőmérséklete miatt a Merkúr nem tud jelentősebb légkört megtartani. Az utóbbi évek űrszondás megfigyelései szerint azonban van egy nagyon ritka légköre, amely a Nap felőli oldalán igen vékony, az éjszakai oldalon vastagabb, csóvaszerű. Főként az állandóan becsapódó (mikro)meteoritokból, illetve a becsapódás helyének felszíni anyagaiból, valamint a napszélből származik. Ez a légköri anyag ahogy keletkezik, el is szökik az űrbe, de az említett folyamatok állandóan újratermelik. Összetétele körülbelül 40% oxigén, 30% nátrium, 20% hidrogén, 5% hélium, de kimutattak benne káliumot, xenont, kriptonot, argont, neont, nitrogént, vizet, széndioxidot, kalciumot és magnéziumot is. A feladatnak megfelelően a kripton és a xenon maradhatna meg tartósan, ám ezt az igen ritka légkört nem úgy kell elképzelnünk, mint a földit, ahol a légkör részecskéi folyamatosan ütköznek egymással. A Merkúr légkörének részecskéi egymással szinte egyáltalán nem találkoznak mielőtt az űrbe távoznának.

4.5 (a) $\sqrt{\frac{3kT}{m}} < 0,1 \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

$$100 \cdot \frac{3kT}{m} < \frac{2GM}{R}$$

$$m > \frac{150kTR}{GM}$$

$$m > \frac{150 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 95 \cdot 2,575 \cdot 10^6}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,34 \cdot 10^{23}}$$

$$m > 5,65 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

Ez 34 g moláris tömegnek felel meg.

Megjegyzés:

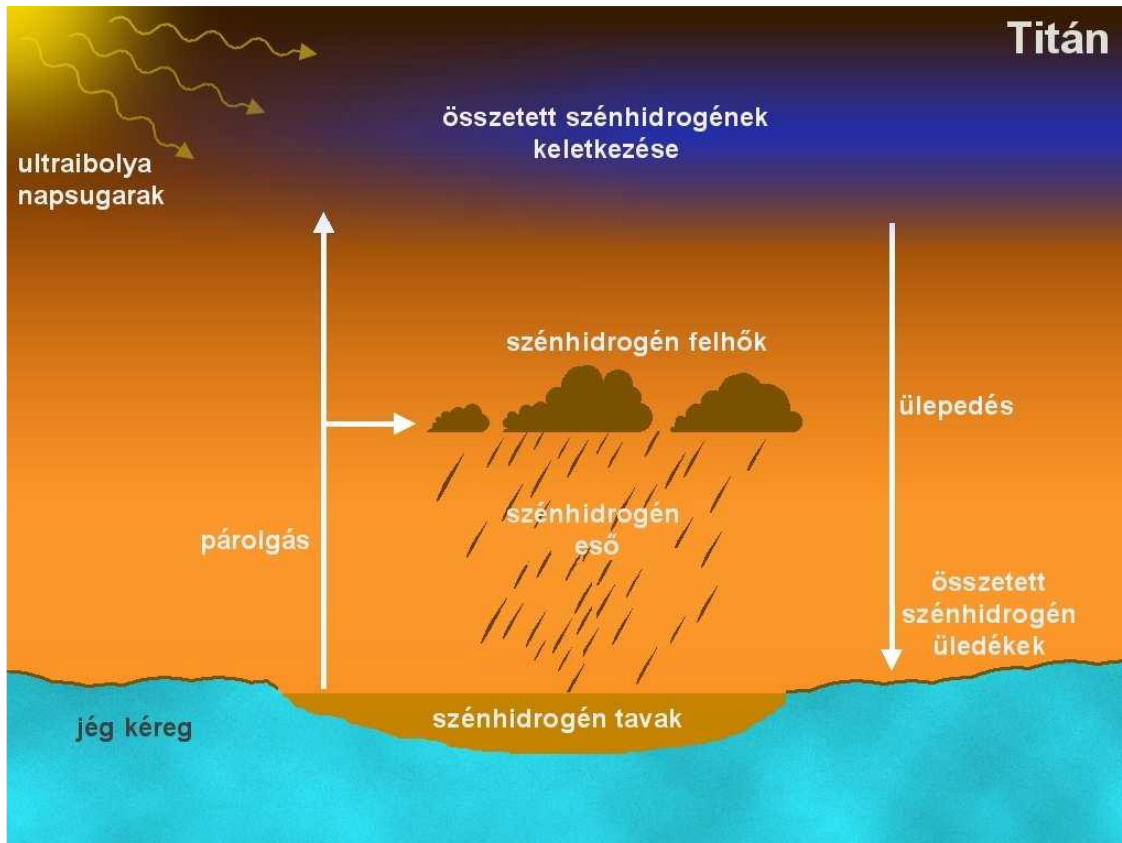
A Titán légköre 90%-ban nitrogénből áll. A radioaktív bomlásból származó hő hatására elpárolgó ammónia-jég nitrogénre és hidrogénre bomlik a Nap UV sugárzásának hatására. Az így fejlődő nitrogén táplálja a légkört.

(b) A Titánon a nyomás és a hőmérséklet a metán hármaspontja közelében van, ahogyan a földi nyomás és hőmérséklet a víz hármaspontja közelében. Így a metán mindhárom halmazállapotban megtalálható rajta, csakúgy, mint a víz a Földön. (Metánhó hullhat a sarki metánjégsapkákra, metáneső táplálhat metánfolyókat és -tavakat a melegebb vidékeken. Lásd a következő oldal ábráját.)

(c) A hidrosztatikai összefüggés alapján a felszínen a nyomás

$$p = \rho gh, \text{ ahol}$$

$$g = \frac{\gamma M}{r^2} = \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 1,3 \cdot 10^{23}}{(2,6 \cdot 10^6)^2} = 1,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



<http://www.csillagasz.at/>

Másrészt, az ideális gáz állapotegyenlete szerint

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{\rho RT}{\mu},$$

ahol μ a moláris tömeg.

$$\rho gh = \frac{\rho RT}{\mu}$$

A hőmérséklet 95 K, és légkör főként nitrogénből áll.

$$h = \frac{RT}{\mu g} = \frac{8,3 \cdot 95}{0,028 \cdot 1,3} \approx 20 \text{ km}$$

Megjegyzés:

Mivel a légkör sűrűsége és nyomása a magassággal csökken, az így kiszámolt magasság valójában az a magasság, amelynél a csökkenés $1/e$ -szeres, lásd a következő feladatot.

4.6 (a) A Földön

$$H = \frac{kT}{mg} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 240}{0,029 / (6 \cdot 10^{23}) \cdot 9,8} = \frac{1,38 \cdot 240 \cdot 6}{0,029 \cdot 9,8} = 7 \text{ km}$$

A neutroncsillagon

$$H = \frac{kT}{mg} = \frac{1,38 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 6}{0,012 \cdot 10 \cdot 10^{11}} = 2 \text{ mm}.$$

(b) $\ln 1\,000\,000 \approx 14$.

A skálamagasság 14-szerese a Földön 97 km, a neutroncsillagon kb. 2,8 cm.

$$4.7 \text{ (a)} \quad F_{\text{grav}} = \frac{\gamma \cdot (M/2)^2}{r^2} = \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot (1 \cdot 10^{30})^2}{(7,0 \cdot 10^8)^2} = 1,4 \cdot 10^{32} \text{ N}$$

$$(b) \quad p_{\text{grav}} = \frac{F_{\text{grav}}}{r^2 \pi} = \left(\frac{\gamma \cdot (M/2)^2}{r^4 \cdot \pi} \right) = \frac{1,4 \cdot 10^{32}}{(7,0 \cdot 10^8)^2 \cdot \pi} = 8,9 \cdot 10^{13} \text{ Pa}.$$

$$(c) \quad p = n \cdot \frac{RT}{V} = \frac{M}{m} \cdot \frac{RT}{V} = \frac{\rho RT}{m},$$

ahol R az univerzális gázállandó.

$$(d) \quad T = \frac{m \cdot p}{\rho \cdot R} = \frac{4\pi \cdot r^3 \cdot m \cdot p}{3M \cdot R} = \frac{4\pi \cdot r^3 \cdot m}{3M \cdot R} \cdot \frac{\gamma \cdot (M/2)^2}{r^4 \cdot \pi} = \frac{\gamma m M}{3R \cdot r} = \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 0,00075 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{3 \cdot 8,3 \cdot 7,0 \cdot 10^8} = 6 \text{ millió K}$$

A hőmérséklet 10 millió K nagyságrendű.

4.8 (a) A fotonok összes energiája 1370 J, és az E energiájú foton lendülete E/c , tehát a felületegységnek időegységenként átadott összes lendület

$$\frac{S}{c} = \frac{1370 \frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2}}{3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 4,57 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

(b) Az egységnyi felületnek időegység alatt átadott lendület az egységnyi felületre ható erő, vagyis éppen a nyomás. Ha az összes foton elnyelődik, akkor az átadott lendület a fotonok lendülete, ezért

$$p = 4,57 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

(c) Ha a fotonok visszaverődnek, akkor a lendületváltozásuk az eredeti lendület kétszerese, ezért

$$p = 2 \cdot 4,57 \cdot 10^{-6} = 9,13 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

4.9 (a) A napállandó $S = 1400 \text{ W/m}^2$.

Az E energiájú foton lendülete E/c .

Az A felületre kifejtett erő az időegység alatt átadott összes lendület. Ha a visszaverődéssel nem foglalkozunk, ez az erő a Föld keresztmetszetén 1 másodperc alatt beeső fotonok összlendülete:

$$\begin{aligned} F &= \frac{A \cdot S}{c} = \frac{R^2 \pi \cdot S}{c} = \\ &= \frac{(6,4 \cdot 10^6)^2 \cdot \pi \cdot 1400 \frac{\text{Ws}}{\text{m}}}{3,0 \cdot 10^8} = 6 \cdot 10^8 \text{ N}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad F &= \frac{\gamma m M}{r^2} = \\ &= \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 6,0 \cdot 10^{24} \cdot 2,0 \cdot 10^{30}}{(1,5 \cdot 10^{11})^2} = 3,6 \cdot 10^{22} \text{ N} \end{aligned}$$

14 nagyságrenddel nagyobb.

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \frac{R^2 \pi \cdot S}{c} &= \frac{\gamma m M}{r^2} \\ \frac{R^2 \pi \cdot S}{c} &= \frac{\gamma \cdot 4R^3 \pi \cdot \rho \cdot M}{3r^2} \\ \frac{S}{c} &= \frac{\gamma \cdot 4R \cdot \rho \cdot M}{3r^2} \\ R &= \frac{3r^2 S}{4\gamma \rho M c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{3 \cdot (1,5 \cdot 10^{11})^2 \cdot 1400}{4 \cdot 6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 5500 \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 3 \cdot 10^8} \\ R &= 1 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0,1 \mu\text{m} \end{aligned}$$

(d) A napállandó, és ezzel arányosan a sugárnyomás a naptávolság négyzetével fordított arányban csökken, csakúgy, mint a gravitációs vonzás. A két erő hányadosa tehát változatlan.

4.10 (a) A sugárnyomás a távolságnégyzettel fordított arányban nagyobb, mint a Föld távolságában:

$$p = \frac{S}{c} \cdot \left(\frac{15}{9}\right)^2 = 4,6 \cdot 10^{-6} \cdot \left(\frac{15}{9}\right)^2 = 1,3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

(b) A sugárnyomás által kifejtett erő

$$\begin{aligned} F &= R^2 \pi \cdot p = \\ &= (2,5 \cdot 10^{-7})^2 \cdot \pi \cdot 1,3 \cdot 10^{-5} = 3 \cdot 10^{-18} \text{ N}. \end{aligned}$$

(A visszaverődés miatt valójában ennél kissé nagyobb.)

A Nap gravitációs ereje

$$\begin{aligned} F &= \frac{\gamma m M}{r^2} = \frac{\gamma \cdot 4R^3 \pi \cdot \rho \cdot M}{3r^2} = \\ &= \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 4(2,5 \cdot 10^{-7})^3 \pi \cdot 2000 \cdot 2,0 \cdot 10^{30}}{3 \cdot (9,0 \cdot 10^{10})^2} = \\ &= 2 \cdot 10^{-18} \text{ N} \end{aligned}$$

Megjegyzés:

Ha a csóva kialakulását vizsgáljuk, a porszemcse gyorsulásának meghatározásához figyelembe kell venni az üstökös mag gravitációját, valamint magot körülvevő por- és gázfelhő hatását is.

4.11 (a) A Föld távolságában a sugárnyomás:

$$\frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 1370 \frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2}}{3,00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 9,13 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

A vitorlára kifejtett erő

$$F = pA = 9,13 \cdot 10^{-6} \cdot 32 = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ N}.$$

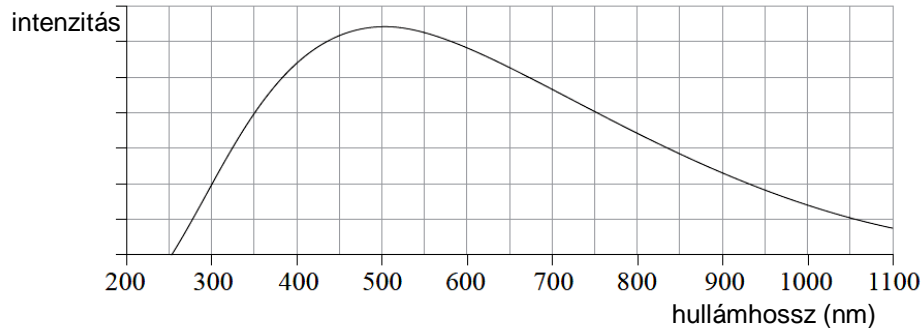
Az okozott gyorsulás

$$a = \frac{F}{m} = \frac{2,9 \cdot 10^{-4}}{5} = 5,8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

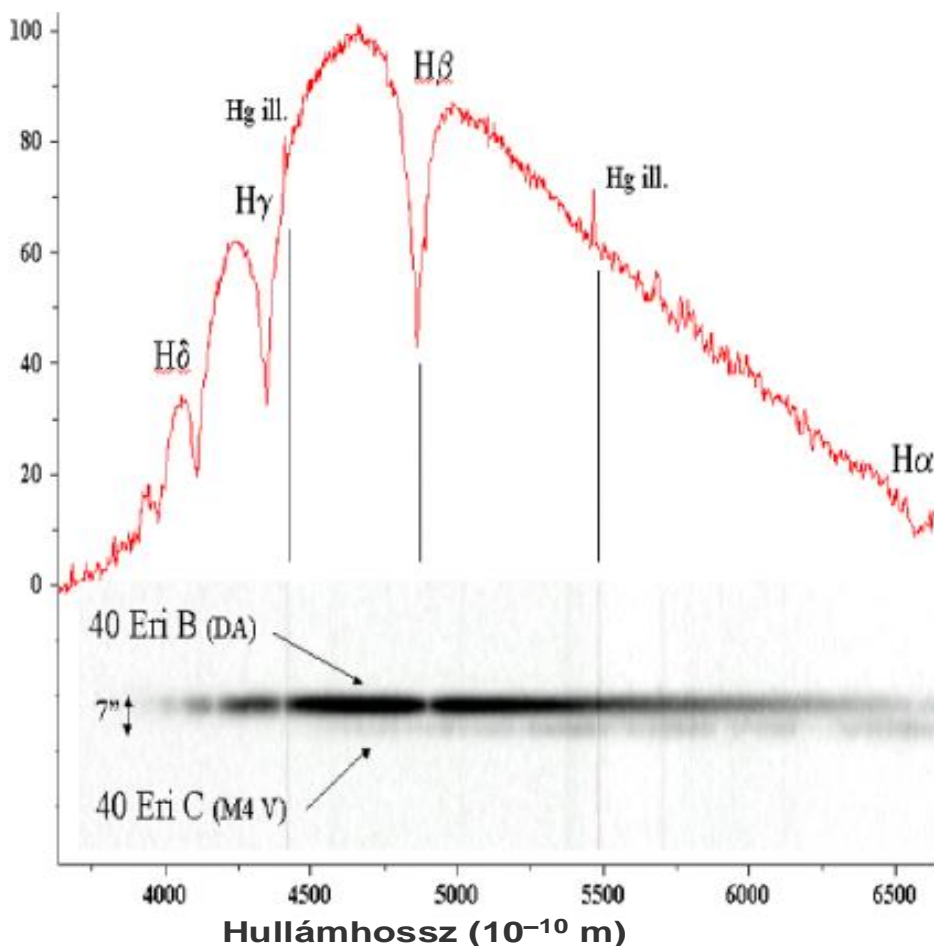
$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad v &= at = 5,8 \cdot 10^{-5} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = \\ &= 1800 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6600 \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{aligned}$$

5. A hőmérsékleti sugárzás törvényeinek alkalmazása WIEN-FÉLE ELTOLÓDÁSI TÖRVÉNY

5.1 Az ábrán a Nap feketetest-spektruma látható. Az ábra alapján határozd meg a Nap effektív hőmérsékletét (azaz a neki megfeleltethető fekete test hőmérsékletét).



5.2 Az ábrán a 40 Eridani B nevű fehér törpe spektruma látható. Mennyi a 40 Eridani B hőmérséklete?



<http://spacemath.gsfc.nasa.gov>

5.3 A Deneb a Hattyú csillagkép legfényesebb csillaga (α Cygni). Effektív hőmérséklete 10 500 K. Az Antares szuperóriás csillag a Skorprió csillagképben (α Scorpi). Effektív hőmérséklete 3000 K. Melyiket milyen színűnek látjuk?

5. A hőmérsékleti sugárzás törvényeinek alkalmazása LUMINOZITÁS ÉS INTENZITÁS

5.4 Egy P teljesítménnyel sugárzó test sugárzásának intenzitása a testtől d távolságra levő helyen

$$I = \frac{P}{4\pi d^2}. \text{ Milyen feltételezés(ek)re épül ez az összefüggés?}$$

5.5 A Föld távolságában a Nap sugárzásának intenzitása körülbelül 1400 W/m^2 (napállandó). Miért van az, hogy a Föld felszínére (a légkör tetejére) beeső átlagos intenzitás csak 350 W/m^2 .

5.6 A Nap sugárzási teljesítménye (luminozitása) $3,9 \cdot 10^{26} \text{ W}$, távolsága $1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Mutasd meg, hogy a napállandó értéke körülbelül 1400 W/m^2 .

5.7 A Ross 128 nevű csillag luminozitása $1,1 \cdot 10^{21} \text{ W}$, fényének intenzitása $7,9 \cdot 10^{-15} \text{ W/m}^2$ a Föld távolságában. Hány fényév a Földtől való távolsága?

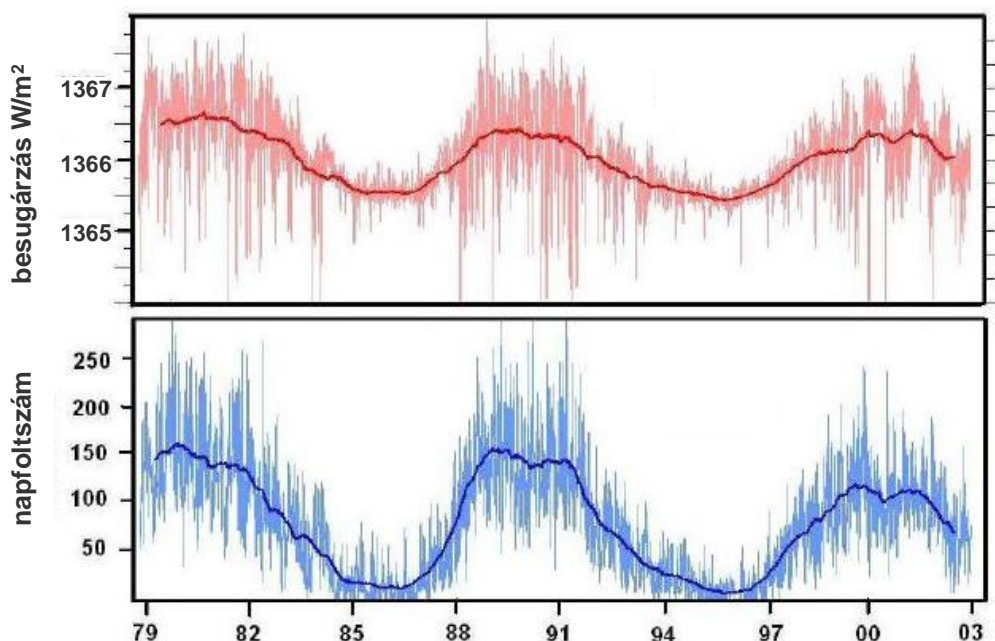
5.8 Az alábbi két grafikon a Földre (a magaslégtérre) beérkező napsugárzás intenzitásának, illetve a napfoltok számának változását ábrázolja 25 éven keresztül.

(A vékony vonalak a napi értékek ingadozásait, a vastag vonalak az éves futóátlagokat mutatják.)

(a) A grafikonok alapján milyen összefüggés állapítható meg a besugárzás intenzitása és a napfoltok száma között?

(b) Körülbelül mennyi volt az átlagos intenzitás (napállandó)? Mekkora az éves átlag ingadozása a napfoltciklus alatt?

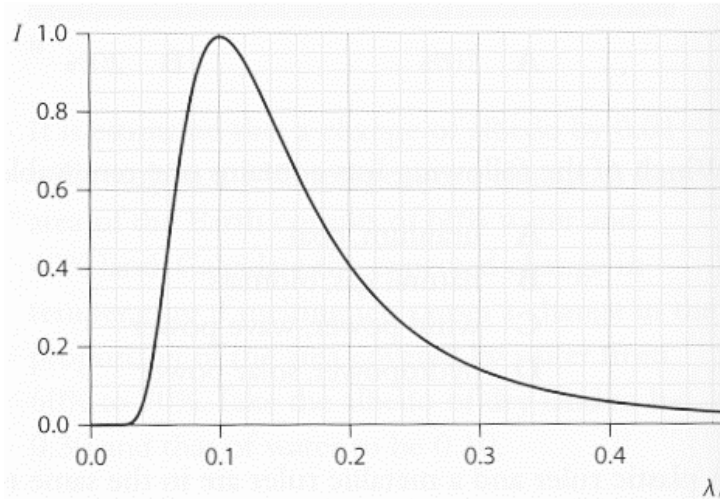
(c) Valaki 1985-ben napelemeket szerelt a háza tetejére, és segítségével az év folyamán összesen 3000 kWh elektromos energiát termelt. Ha feltelevük, hogy a talajszinten mért intenzitás a magaslégtérhez hasonlóan változik, körülbelül mennyivel több elektromos energiát termelhetett ugyanez a rendszer 1989-ben, mint 1985-ben?



<http://spacemath.gsfc.nasa.gov>

5. A hőmérsékleti sugárzás törvényeinek alkalmazása STEFAN–BOLTZMANN-TÖRVÉNY

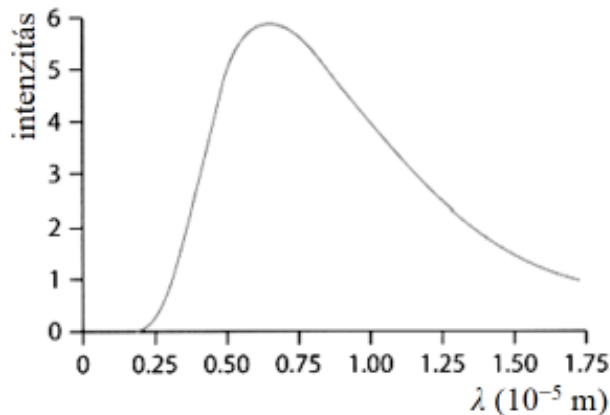
5.9 (a) A grafikon egy fekete test által kibocsátott sugárzás intenzitásának hullámhossz szerinti eloszlását mutatja (önkéntes egységekben). Rajzold be a fele ekkora hőmérsékletű test sugárzásának intenzitás-eloszlását.



Az alábbi ábrán egy fekete test által kibocsátott sugárzás hullámhosszak szerinti eloszlása látható.

(b) Mennyi a test hőmérséklete?

(c) Rajzold be az ábrába egy 300 K hőmérsékletű fekete test sugárzásának eloszlását.



5.10 (a) Hányszor akkora teljesítménnyel sugároz területegységenként egy 900 K hőmérsékletű fekete test, mint egy 300 K hőmérsékletű?

(b) Hányszorosára nő a kisugárzott teljesítmény, ha egy test hőmérséklete 100°C-ról 150°C-ra nő?

5.11 A Betelgeuse a következő oldali képen látható Orion csillagkép legfényesebb csillaga. Luminozitása $3,9 \cdot 10^{30}$ W, effektív hőmérséklete 3000 K.

(a) Mekkora a Betelgeuse sugara?

(b) Mekkora hullámhosszon sugároz a Betelgeuse maximális intenzitással?

(c) Milyen színű csillag a Betelgeuse? Melyik csillag lehet a képen?



5.12 Az Antares a Skorpió csillagkép legfényesebb csillaga. Kettős rendszer, fényesebbik csillaga az Antares A, amelynek effektív hőmérséklete körülbelül 3100 K. Kísérőjének, az Antares B-nek körülbelül 15 000 K az effektív hőmérséklete, luminozitása (kisugárzott teljesítménye) pedig 1/40 része az Antares A luminozitásának.

(a) Hányszor nagyobb sugarú az Antares A, mint az Antares B?

(b) Milyen színű az Antares?

5.13 A Nap által kisugárzott teljesítmény (a Nap luminozitása) $3,90 \cdot 10^{26}$ W.

A Nap sugara $6,96 \cdot 10^8$ m.

(a) A Nap felületének hány négyzetmétere sugároz 1000 MW teljesítménnyel?

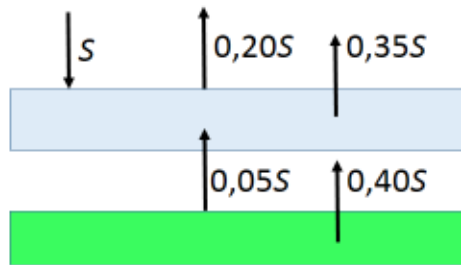
(b) Mennyi a megadott adatok alapján a Nap felszínének hőmérséklete?

(c) Egyes elméleti feltételezések szerint a Naprendszer kialakulásának egy korai stádiumában a Nap hőmérséklete 5000 K volt, sugara pedig a mainak 1,02-szorosa. Mennyi volt akkor a napállandó? (A Föld pályasugara ugyanennyi volt.)

5.14 Képzeld el, hogy lecsökken a d Nap–Föld távolság. Ekkor a Föld T hőmérséklete megnő. A napsugárzás Földre beeső hányada $1/d^2$ -tel arányos, a Föld által kisugárzott teljesítmény pedig T^4 -nel. A Föld átlagos hőmérséklete 288 K. Mennyivel nőne ez a hőmérséklet, ha a távolság 1%-kal csökkenne?

5. A hőmérsékleti sugárzás törvényeinek alkalmazása ALBEDÓ, BOLYGÓK HŐMÉRSÉKLETÉNEK BECSLÉSE

5.15 A beeső sugárzás bizonyos hányadát (planetáris albedó) a bolygók visszaverik, a többi részét elnyelik. Egy bolygó felszínére beeső napsugárzás intenzitása S . Az ábra szemlélteti a bolygó energiámérlegét: A légkör által visszavert intenzitás $0,20S$, a légkör által kisugárzott intenzitás $0,35S$. A felszín által visszavert intenzitás $0,05S$, a felszín által kisugárzott intenzitás $0,40S$. Mennyi a bolygó albedója?



5.16 Becslések szerint az albedó értékének $0,01$ -dal való csökkenése 1°C hőmérsékletemelkedést eredményez. A Föld felszínének egy nagy kiterjedésű tartománya 60% -ban víz, 40% -ban szárazföld. A szárazföld albedója $0,3$, a vízé $0,1$. Tegyük fel, hogy jégolvadás miatt a vízzel borított rész aránya 60% -ról 70% -ra nő. Mennyivel növekszik a régió átlaghőmérséklete?

5.17 A földfelszínre beeső napsugárzás átlagos intenzitása 340 W m^{-2} . Bolygónk átlagos albedója $0,30$. Az elmúlt évtizedekben jelentősen megnőtt a szén-dioxid mennyisége a Föld légkörében. Becslések szerint a széndioxid-mennyiség megkétszereződésének hatásai $0,01$ -dal csökkentik a Föld albedóját. Ez alapján a megkétszereződés mennyivel csökkenti a Föld által a világűrbe kisugárzott intenzitást?

5.18 (a) A Föld távolságában a napsugárzás intenzitása $S = 1380 \text{ W/m}^2$.

A Föld átlagos albedója $\alpha = 0,30$.

Mutasd meg, hogy a Föld felszínéről visszavert sugárzás átlagos intenzitása körülbelül 100 W/m^2 .

(b) Magyarázd meg, miért $\frac{S(1-\alpha)}{4}$ a földfelszín által elnyelt átlagos intenzitás, és számítsd ki az értékét.

(c) Mennyi a földfelszín által kibocsátott sugárzás átlagos intenzitása?

5.19 (a) A Nap sugárzási teljesítménye (luminozitása) $L = 3,90 \cdot 10^{26} \text{ W}$. Időátlagban mekkora a Naptól r távolságra keringő (saját tengelye körül is forgó) bolygó egységnyi felületére egységnyi idő alatt beeső napsugárzási energia (vagyis a beeső intenzitás)?

(b) Mennyi az átlagos beeső intenzitás értéke a Földön, a Merkúron, a Vénuszon, illetve a Marson?

(c) Hőmérsékleti egyensúly esetén a bolygó az elnyelt teljesítménnyel azonos teljesítménnyel sugároz is energiát kifelé a világűrbe. Tegyük fel, hogy a kisugárzás szempontjából a bolygók feketetest módjára viselkednek. A (b) feladat eredményéből és a planetáris albedók táblázatból vett értékéből számítsd ki, mekkora hőmérsékletű feketetestként sugároz a világűr felé a fenti négy bolygó.

(d) A tényleges átlagos felszíni hőmérsékletek a következők:

Merkúr: 170°C , Vénusz: 460°C , Föld: $+15^\circ\text{C}$, Mars: -65°C . Mely bolygók esetében mutat ezzel jó egyezést a számított érték, és melyeknél nem? Mi lehet ennek az oka?

Megoldás 5.

5.1 (a) A maximumhoz tartozó hullámhossz 500 nm, így $T = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{5,0 \cdot 10^{-7}} = 5800\text{K}$.

5.2 A görbe maximuma 4650 angström hullámhossznál van, ezért $T = \frac{2,897 \cdot 10^{-3}}{4,65 \cdot 10^{-7}} = 6200\text{K}$

5.3 Deneb: $\lambda_{\max} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{10500} = 280\text{ nm}$
(ultraibolya), a spektrum látható részét kéknek érzékeljük.

Antares: $\lambda_{\max} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{3000} = 970\text{ nm}$
(infravörös), a spektrum látható részét vörösnek érzékeljük.

5.4 Feltételezzük, hogy a sugárzás intenzitása minden irányban ugyanakkora, és hogy a d távolság megtétele közben nincs elnyelődés.

5.5 Az R sugarú Földet a naptól $R^2\pi$ keresztmetszetű henger alakú sugárnyaláb éri el, amely

a forgó Földön hosszú idő átlagában $4R^2\pi$, vagyis 4-szer akkora felszínen oszlik el. Az átlagos intenzitás tehát $1400\text{ W/m}^2 / 4 = 350\text{ W/m}^2$.

$$\mathbf{5.6} \quad S = \frac{L_{\text{Nap}}}{4\pi \cdot d^2} = \frac{3,9 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot (1,5 \cdot 10^{11})^2} = 1400 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

5.7 Az L luminozitás, d távolság és I intenzitás

$$I = \frac{L}{4\pi d^2} \text{ összefüggéséből}$$

$$d^2 = \frac{1,1 \cdot 10^{21}}{4\pi \cdot 7,9 \cdot 10^{-15}},$$

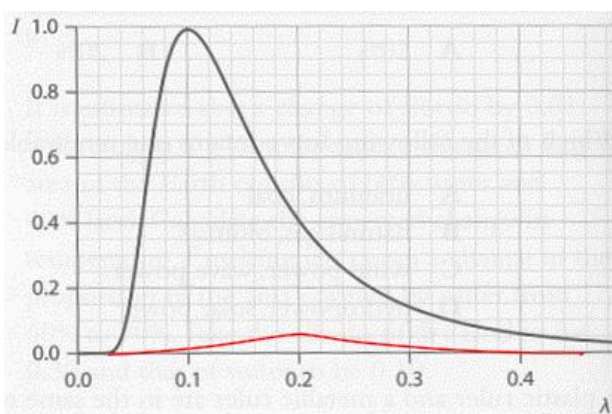
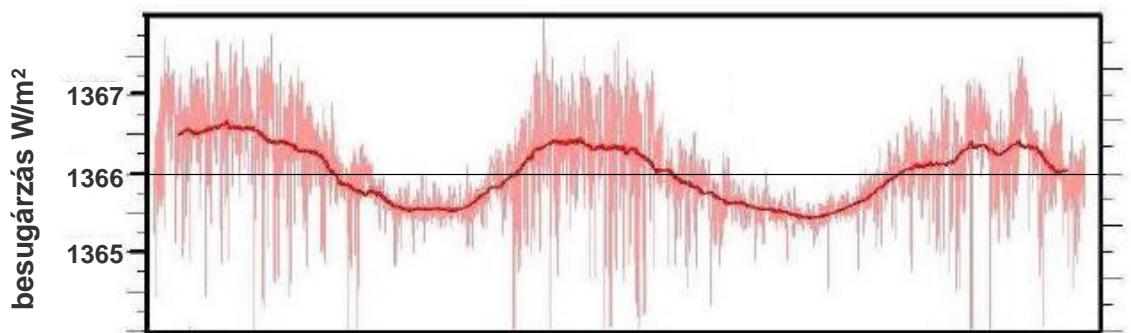
$$\text{ahonnan } d = 1,05 \cdot 10^{17}\text{ m} = 11 \text{ fényév.}$$

5.8 (a) Az intenzitás követni látszik a 11 éves napfoltciklust. Erősebb napfolttevékenységkor nagyobb az intenzitás.

(b) Az átlag kb 1366 W/m^2 , a legnagyobb eltérés kb. $\pm 0,5\text{ W/m}^2$.

(c) 1985-ben minimum volt, 1989-ben pedig maximum, az eltérés kb. 1 W/m^2 .

$$\text{A többlettermelés } 3000 \cdot \frac{1}{1366} \approx 2\text{ kWh}.$$

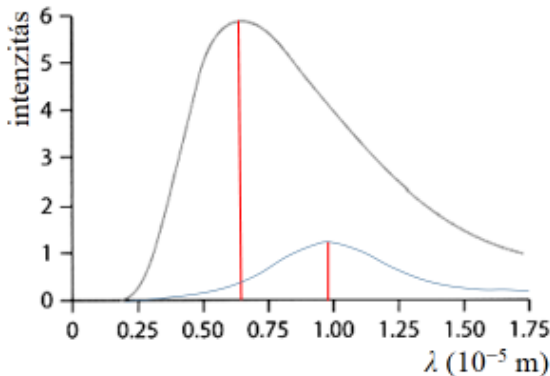


5.9 (a) A Wien-törvény alapján a maximális intenzitáshoz tartozó hullámhossz kétszer akkora, a görbe alatti terület pedig a Stefan-Boltzmann-törvény alapján $(1/2)^4 = 1/16$ -szor kisebb.

(b) A maximális intenzitáshoz tartozó hullámhossz a grafikonról leolvasva $0,65 \cdot 10^{-5}\text{ m}$, a hőmérséklet Wien törvényéből

$$T = \frac{2,90 \cdot 10^{-3}}{0,65 \cdot 10^{-5}} \approx 450\text{K}.$$

(c) $300/450 = 0,67$, a hőmérséklet tehát kb. $2/3$ részére csökken, a csúcshoz tartozó hullámhossz tehát másfélszeres, kb. $0,97 \cdot 10^{-5}$ m. A görbe alatti terület kb. $(300/446)^4 = 0,20$ -szeresére, tehát ötödére csökken.



5.10 (a) $3^4 = 81$ -szer.

(b) $(423/373)^4 = 1,65$ -ször.

5.11 (a) Alkalmazva a Stefan–Boltzmann-törvényt

$$L = \sigma \cdot 4\pi R^2 \cdot T^4$$

$$R = \sqrt{\frac{L}{\sigma \cdot 4\pi \cdot T^4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3,9 \cdot 10^{30}}{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 4\pi \cdot 3000^4}} = 2,6 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

(b) $\lambda_{\max} = \frac{2,90 \cdot 10^{-3}}{3000} = 970 \text{ nm}$.

(c) Vörös (óriás). A kép bal felső csillaga.

5.12 (a) $\frac{L_A}{L_B} = \frac{\sigma \cdot 4\pi R_A^2 \cdot T_A^4}{\sigma \cdot 4\pi R_B^2 \cdot T_B^4} = 40$, ebből

$$\frac{R_A}{R_B} = \sqrt{40} \left(\frac{15000}{3100} \right)^2 = 150\text{-szer akkora.}$$

(b) A színt a 40-szer nagyobb luminozitású Antares A határozza meg.

$$\lambda = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{3100} = 9,35 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 935 \text{ nm}$$

A 935 nm infravörös, az Antares színe tehát vörös (vörös szuperóriás).

5.13 (a) A Nap felületén

$$I = \frac{3,90 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot (6,96 \cdot 10^8)^2} = 6,41 \cdot 10^7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} =$$

$$= 64,1 \text{ MW/m}^2.$$

1000 MW-hoz $15,6 \text{ m}^2$ kell.

(b) $L = \sigma \cdot 4\pi R^2 \cdot T^4$, ebből

$$T = \sqrt[4]{\frac{L}{\sigma \cdot 4\pi R^2}} =$$

$$\sqrt[4]{\frac{3,90 \cdot 10^{26}}{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 4\pi \cdot (6,96 \cdot 10^8)^2}} = 5800 \text{ K},$$

vagy az (a) eredményből közvetlenül:

$$T = \sqrt[4]{\frac{6,41 \cdot 10^7}{5,67 \cdot 10^{-8}}} = 5800 \text{ K}.$$

(c) $1370 \cdot \left(\frac{5000}{5800}\right)^4 \cdot \left(\frac{1,02}{1}\right)^2 = 788 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

5.14 A d távolság 1%-os csökkenésével $1/d^2$ 2%-kal nő, vagyis a napállandó 2%-kal nő. A besugárzás 2%-os növekedése egyensúly esetén a kisugárzás 2%-os növekedését jelenti. Ha T^4 2%-kal nő, akkor a T abszolút hőmérséklet 0,5%-kal nő: $288 \cdot 0,05 = 1,4 \text{ K}$.

Vagy:

Egyensúlyt feltételezve T arányos $1/\sqrt{d}$ -vel, ezért

$$T' = \frac{T}{\sqrt{0,99}} = 289,5 \text{ K},$$

a hőmérsékletnövekedés tehát $1,5 \text{ K}$.

5.15 Az összes visszavert hányad $0,20 + 0,05 = 0,25$.

5.16 A visszavert hányad eredetileg

$$0,3 \cdot 0,4 + 0,1 \cdot 0,6 = 0,18.$$

A megváltozott érték

$$0,3 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,7 = 0,16.$$

0,02-dal kevesebb, ami 2°C hőmérsékletemelkedést jelent.

5.17 A visszavert intenzitás csökkenése $0,01 \cdot 340 \approx 3 \text{ W/m}^2$.

5.18 (a) Korábban megállapítottuk, hogy a forgó Föld felszínére beeső sugárzás átlagos intenzitása a napállandó negyede. A visszavert intenzitás tehát

$$\frac{\alpha S}{4} = \frac{0,30 \cdot 1380}{4} = 100 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

(b) A légkör felszínére érkező átlagos intenzitás

$$\frac{S}{4}, \text{ ebből visszaverődik } \frac{\alpha S}{4}.$$

A földfelszín által elnyelt átlagos intenzitás a

$$\text{kettő különbsége: } \frac{S}{4} - \frac{\alpha S}{4} = \frac{S(1-\alpha)}{4}.$$

$$\frac{S(1-\alpha)}{4} = \frac{1380 \cdot 0,70}{4} = 242 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

(c) A kibocsátott intenzitás (egyensúlyt feltételezve) ugyanennyi.

5.19 (a) r távolságban a napsugárzás intenzitása (napállandó) $S = \frac{L}{4\pi r^2}$

A sugárzás $R^2\pi$ keresztmetszeten át érkezik be, de a forgás miatt a bolygó $4R^2\pi$ felszínét éri, így a felszínen az átlagos beeső intenzitás a napállandó negyede:

$$I_{\text{be}} = \frac{S}{4} = \frac{L}{16\pi r^2}$$

(b) A pályasugarakat behelyettesítve:

$$\text{Merkúr: } 2310 \text{ W/m}^2.$$

$$\text{Vénusz: } 663 \text{ W/m}^2.$$

$$\text{Föld: } 345 \text{ W/m}^2.$$

$$\text{Mars: } 149 \text{ W/m}^2.$$

(c) Ha α a planetáris albedó, akkor az elnyelt intenzitás $(1-\alpha)\frac{S}{4}$

Egyensúly esetén az elnyelt intenzitás egyenlő a kisugárzott intenzitással. A bolygót T hőmérsékletű fekete testnek tekintve:

$$I_{\text{ki}} = \sigma \cdot T^4$$

$$(1-\alpha)\frac{S}{4} = \sigma \cdot T^4$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{(1-\alpha)S}{4\sigma}}$$

A bolygók albedója és számított hőmérséklete:

$$\text{Merkúr: } 0,068 \quad 441 \text{ K (168}^\circ\text{C)}$$

$$\text{Vénusz: } 0,770 \quad 228 \text{ K (-45}^\circ\text{C)}$$

$$\text{Föld: } 0,306 \quad 255 \text{ K (-18}^\circ\text{C)}$$

$$\text{Mars: } 0,250 \quad 211 \text{ K (-62}^\circ\text{C)}$$

(d) A Merkúr és a Mars esetében jól közelítettük a valóságos hőmérsékletet, a Föld és a Vénusz esetében a számított érték sokkal alacsonyabb.

Ennek oka, hogy a számított érték az a hőmérséklet, amilyen hőmérsékletű feketetestként a bolygó a világűrben nézve viselkedik, a világűr felé sugároz. A modell nem vette figyelembe, hogy a Földnek és a Vénusznak jelentős légköre van, a légkör pedig nemcsak kifelé, hanem a felszín felé is sugároz, így a felszín által elnyelt és kibocsátott intenzitás nagyobb az itt számítotttnál (Ez az üvegházhatás.)

Irodalom

W. J. Kaufmann: *Universe*, W. H. Freeman and Co., New York, 1988.

H. Karttunen, P. Kröger, H. Oja, M. Poutanen, K. J. Donner (Szerk.): *Fundamental Astronomy*, Springer, Berlin Heidelberg, 2007.

M. Seeds, J. Holzinger: *Student Observation Guide with Laboratory Exercises*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.

T. L. Smith, M. D. Reynolds, J. S. Huebner: *Basic Astronomy Labs*, University of North Florida, 1996.

ASTR 1010 Laboratory Manual, Introduction to Astronomy, Dept. of Astrophysical and Planetary Sciences, University of Colorado, Boulder, 2016.

Bécsy B., Dálya G.: *A Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpia Szakkör feladatai*: <http://becsybence.web.elte.hu>

<http://www.stellarium.org>

[soho_realttime_hmi_Continuum](http://soho_realttime_hmi.Continuum)

<http://astronomie-smartsmur.over-blog.com>

<https://www.projectpluto.com/jevent.htm><http://www.eso.org>

<http://www.csillagasz.at/>

<https://nssdc.gsfc.nasa.gov>

<http://spacemath.gsfc.nasa.gov>

<https://sites.google.com/a/uw.edu/introductory-astronomy-clearinghouse/assignments/labs-exercises>

https://www.nasa.gov/mission_pages/tdm/solarsail/index.html

https://phys.libretexts.org/TextBooks_and_TextMaps/University_Physics/

<https://courses.lumenlearning.com/astronomy/>